0412 ბიზნესი და ადმინისტრირება BUSINESS ADMINISTRATION

საინვესტიციო ოპერაციების ფინანსური რისკების მართვის ციფრული მოდელი

გურამ ჩაჩანიძე
ევროპული განათლების ცენტრი
E-mail: guram.chachanidze@yahoo.com
European Education Center
გურამ კევლიშვილი
E-mail: Kevlogug@gmail.com
კავკასიის უნივერსიტეტი

რეფერატი

წინამდებარე ნაშრომის კვლევის საგანს წარმოადგენს საინვესტიციო ოპერაციების მართვა და სისტემური ფინანსური რისკების ოპტიმიზაცია მაღალვოლატილურ საბაზრო გარემოში.

კვლევის ძირითადი მიზანია კაპიტალის დინამიური განაწილების პროცესისთვის ახალი ციფრული არქიტექტურის შემუშავება, რომელიც დაეფუძნება ოპტიმალური მართვის უწყვეტ წრფივ-კვადრატულ (Linear-Quadratic Regulator - LQR) მარეგულირებელ მოდელს და უზრუნველყოფს საინვესტიციო გადაწყვეტილებების მიღებას განმეორებითი წრფივი ტრანსფორმაციების გამორიცხვით, რაც მნიშვნელოვნად ამცირებს გამოთვლით დროსა და რესურსებს.

ნაშრომში მეთოდოლოგიად გამოყენებულია დინამიური პროგრამირებისა და ბელმანის ოპტიმალურობის პრინციპი, წრფივ-კვადრატული რეგულატორების (LQR) მათემატიკური აპარატი და რიკატის (Riccati) მატრიცული დიფერენციალური განტოლებები. მოდელის მათემატიკური მდგრადობის, კონვერგენციისა და ერთადერთობის დასასაბუთებლად გამოყენებულია კლასიკური ლიფშიცის (Lipschitz) მუდმივები და პირობები ლოკალური და ნახევრადლოკალური კრებადობის ფარგლებში. რეალიზებულია უწყვეტი მათემატიკური მოდელი, რომელიც დროის რეალურ რეჟიმში ახდენს პორტფელის სტრუქტურის კორექტირებას. თეორიულმა და რიცხვითმა სიმულაციებმა აჩვენა, რომ შემოთავაზებული ალგორითმი ხასიათდება მაღალი მდგრადობით სტრუქტურული საბაზრო რყევებისა და ვოლატილობის (ფასის ცვალებადობისა და არამდგრადობის ხარისხი დროის გარკვეულ მონაკვეთში; ნახტომისებური ცვლილებების Stochastic Volatility Jumps) პირობებში [1].

რიკატის მიმდევრობების ლოკალური კრებადობის დამტკიცება უზრუნველყოფს ოპტიმალური ტრაექტორიის სტაბილურობას.

შემუშავებული ციფრული მოდელი განკუთვნილია თანამედროვე კორპორატიული ფინანსური ინჟინერიისთვის, საინვესტიციო ფონდების (Hedge Funds), საპენსიო აქტივების მმართველი კომპანიებისა და მაღალსიხშირული სავაჭრო სისტემებისთვის (High-Frequency Trading), სადაც კრიტიკულად მნიშვნელოვანია რისკ-წონითი მატრიცების დინამიური თვალთვალი.

საკვანძო სიტყვები: საინვესტიციო ოპერაცია, ფინანსური რისკი, საინვესტიციო გადაწყვეტილება, დინამიური პროგრამირება, წრფივ-კვადრატული რეგულატორი (LQR), რიკატის მატრიცული დიფერენციალური განტოლება, პორტფელის ოპტიმიზაცია, ლიფშიცის მუდმივა, ფინანსური ინჟინერია, რისკ-წონითი მატრიცა.

შესავალი და პრობლემის აქტუალობა

თანამედროვე გლობალური ფინანსური არქიტექტურა ხასიათდება მაღალი ენდოგენური (შიგა) და ეგზოგენური (გარე) შოკებით, სტრუქტურული გაურკვევლობითა და არაწრფივი დინამიკით. კაპიტალის ბაზრების ტრანსფორმაციამ ციფრულ ეპოქაში, სადაც გადაწყვეტილების მიღების სიჩქარე მიკროწამებში იზომება, ტრადიციული პორტფელური მენეჯმენტის მოდელები (მაგალითად, მარკოვიცის კლასიკური საშუალო-ვარიაციის (საშუალო-დისპერსიული) მოდელი - Mean-Variance Optimization) ნაკლებად ეფექტური გახადა. ძველი მოდელების მთავარი ნაკლი მდგომარეობს მათ სტატიკურ ან დისკრეტულ ბუნებაში, რაც ვერ ასახავს ფინანსური აქტივების ფასწარმოქმნის უწყვეტ სტოქასტურ პროცესებს.

კორპორატიული ფინანსური ინჟინერიის წინაშე მდგარი ერთ-ერთი უმთავრესი გამოწვევაა ისეთი მათემატიკური მოდელების შექმნა, რომლებიც შეძლებენ ოპტიმალური გადაწყვეტილებების

გენერირებას დროის ნებისმიერ მონაკვეთში, განსაკუთრებით საბაზრო ლიკვიდობის კრიზისებისა და მაღალი ვოლატილობის პირობებში. აქტივების დინამიური გადანაწილება და რისკების ჰეჯირება (ზარალისგან თავის დაცვა) წარმოადგენს უწყვეტი თვალყურის დევნება(Continuous Tracking) კლასიკურ ამოცანას.

არსებული გამოთვლითი ალგორითმების უმრავლესობა ეფუძნება დროის ყოველ ბიჯზე მრავალჯერადი განმეორებითი წრფივი ტრანსფორმაციებისა და მატრიცების შებრუნების ოპერაციებს. ეს იწვევს ე.წ. "განზომილებიანობის წყევლას" (რიჩარდ ბელმანის ტერმინი - Curse of Dimensionality) და ზრდის გამოთვლით ლატენტურობას (Computational Latency) [2].

ციფრული ფინანსური სისტემებისთვის ისეთი ოპტიმალური კონტროლის მოდელის შემუშავება, რომელიც **გამორიცხავს განმეორებით წრფივ ტრანსფორმაციებს** და ინარჩუნებს მაღალ სიზუსტეს, უაღრესად აქტუალური სამეცნიერო და პრაქტიკული ამოცანაა. ნაშრომი ავსებს ამ ვაკუუმს წრფივ-კვადრატული ოპტიმალური მართვის სისტემის ადაპტირებით ფინანსური პორტფელის პარამეტრებზე.

ძირითადი ნაწილი

მათემატიკური მოდელირება და ანალიზი

განვიხილოთ აქტივების ოპტიმალური განაწილებისა და სისტემური რისკების შემცირების პრობლემა დინამიკურ საინვესტიციო არეზე. ამისათვის ვიხილავთ ფინანსურ პორტფელს, რომელიც შედგება $\mathbf{n}$ რაოდენობის რისკიანი და ურისკო აქტივებისგან.

ვთქვათ, $\boldsymbol{x(t) \in R^n}$ ასახავს ფინანსური პორტფელის მდგომარეობის ვექტორს (სახსრების განაწილებას, აქტივების ღირებულებას ან გადახრას მიზნობრივი მაჩვენებლიდან) დროის $\mathbf{t}$ მომენტში, სადაც $\boldsymbol{t \in [0, T]}$, ხოლო $\boldsymbol{T}$ არის საინვესტიციო ჰორიზონტი.

სისტემის დინამიკა და მართვა

გადაწყვეტილების მიღების პროცესის ფორმირებას ვახდენთ უწყვეტი წრფივ-კვადრატული ოპტიმალური მართვის (Linear-Quadratic Regulator - LQR) სისტემის მეშვეობით [3]:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)U(t), \qquad x(0) = x_0$$

სადაც:

$\boldsymbol{A(t) \in R^{n \times n}}$ არის სისტემური მატრიცა, რომელიც ასახავს ბაზრის შიდა დინამიკას, აქტივების ურთიერთკავშირს (კოვარიაციას) და მათ ბუნებრივ ტრენდებს დროში.

$\boldsymbol{B(t) \in R^{n \times m}}$ არის მართვის ეფექტურობის მატრიცა, რომელიც გვიჩვენებს, თუ როგორ ახდენს გავლენას მიღებული საინვესტიციო გადაწყვეტილებები პორტფელის მდგომარეობაზე.

$\boldsymbol{U(t) \in R^m}$ არის აქტიური საინვესტიციო მართვის გადაწყვეტილებათა ვექტორი (მაგალითად, აქტივების ყიდვა/გაყიდვის მოცულობები ან კაპიტალის ნაკადების რეინვესტირება).

მიზნობრივი ფუნქციონალი და ბელმანის ოპტიმიზაცია

უკუგების (ამონაგების) მაქსიმიზაციისა და საბაზრო რისკების (ცვალებადობის) მინიმუმამდე დაყვანის მიზნით, გადაწყვეტილების მიღების პროცესი ახდენს ბელმანის ფუნქციონალის (ღირებულების ფუნქციის) მინიმიზაციას:

$$\boldsymbol{j(0, u) = \int_0^T [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt + x^T(T)S_x(T)x(T).}$$

აქ მატრიცებს აქვთ შემდეგი ეკონომიკური შინაარსი:

$\boldsymbol{Q(t) \in R^{n \times n}}$ - დადებითად ნახევრადგანსაზღვრული რისკ-წონითი მატრიცა, რომელიც აჯარიმებს პორტფელის მდგომარეობის გადახრას ოპტიმალური ნიშნულიდან (ასახავს პორტფელის არასტაბილურობის რისკს).

$\boldsymbol{R(t) \in R^{m \times m}}$ - დადებითად განსაზღვრული სიმეტრიული მატრიცა, რომელიც ასახავს ტრანზაქციულ ხარჯებს, საბაზრო იმპაქტსა და ლიკვიდობის შეზღუდვებს მართვის განხორციელებისას.

$\boldsymbol{S_x\,(T) \in R^{n \times n}}$ - ტერმინალური რისკის მატრიცა, რომელიც აფასებს პორტფელის მდგომარეობას საინვესტიციო ჰორიზონტის ბოლოს $\boldsymbol{(t = T).}$

ოპტიმალურობის პრინციპის თანახმად, არსებობს ოპტიმალური უკუკავშირითი მართვა (Optimal Feedback Control), რომელიც მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\boldsymbol{u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T\,(t)P(t)x(t).}$$

სადაც $\boldsymbol{P(t)}$ არის სიმეტრიული მატრიცა, რომელიც აკმაყოფილებს რიკატის დიფერენციალურ მატრიცულ განტოლებას (Riccati Differential Equation).

რიკატის დიფერენციალური მიმდევრობა და კრებადობის ანალიზი

პორტფელის ოპტიმიზაციის მთავარი სირთულე გადატანილია $\boldsymbol{P(t)}$ მატრიცის გამოთვლაზე, რომელიც წყვეტს არაწრფივ მატრიცულ განტოლებას უკუდროში $\boldsymbol{t = T -}$ დან $\mathrm{t} = \boldsymbol{0 -}$ კენ:

$$\boldsymbol{-\frac{dP(t)}{dt} = A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t),\;\; P(T) = S_x\,(T)}$$

ნაშრომში დეტალურად არის შესწავლილი რიკატის დიფერენციალური მიმდევრობის ლოკალური და ნახევრადლოკალური კრებადობის პარამეტრები კლასიკურ ლიფშიცის (Lipschitz) პირობებში. ვთქვათ, არაწრფივი ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $\boldsymbol{L}$ მუდმივით:

$$\boldsymbol{\|F(P_1) - F(P_2)\| \le \|P_1 - P_2\|}$$

ლოკალური კრებადობის ანალიზი ადასტურებს, რომ თუ საწყისი მიახლოება მდებარეობს ოპტიმალური ამონახსნის $\boldsymbol{\delta}$ - მიდამოში, მაშინ იაკობო და ვინჩენცო რიკატების განტოლებაზე დაფუძნებული საგამოთვლო მიმდევრობა კრებადია კვადრატული სიჩქარით. ნახევრადლოკალური კრებადობა (კანტოროვიჩის ტიპის თეორემების გამოყენებით) იძლევა გარანტიას, რომ ამონახსნი არსებობს და არის ერთადერთი გარკვეულ სფეროში, მაშინაც კი, როდესაც ზუსტი ამონახსნი წინასწარ უცნობია, რაც უზრუნველყოფს ციფრული ალგორითმის აბსოლუტურ მათემატიკურ სიმტკიცეს.

დასკვნა

წინამდებარე ნაშრომში წარმოდგენილია საინვესტიციო ოპერაციების ფინანსური რისკების მართვის მათემატიკურად გამართული ციფრული მოდელი. მიღებული შედეგები საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დასკვნები:

1. უწყვეტი წრფივ-კვადრატული ოპტიმალური მართვის (LQR) სტრუქტურის გამოყენება საინვესტიციო პორტფელის დინამიკისთვის გამორიცხავს ყოველ ბიჯზე მრავალჯერადი არაწრფივი და წრფივი ტრანსფორმაციების განმეორებითი გამოთვლის საჭიროებას.
2. რიკატის მატრიცული დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირებით მიღწეულია ოპტიმალური მართვის ვექტორის $\boldsymbol{u^*(t)}$ანალიზური სიზუსტე, რაც ზრდის ციფრული სისტემების რეაგირების სიჩქარეს დროის რეალურ რეჟიმში.
3. ლიფშიცის პირობებში ლოკალური და ნახევრადლოკალური კრებადობის თეორიულმა ანალიზმა დაადასტურა ალგორითმის მათემატიკური მდგრადობა.
4. რიცხვითი სიმულაციები აჩვენებს, რომ მოდელი ინარჩუნებს მაღალ ეფექტურობას და მდგრადობას ვოლატილურ ფინანსურ გარემოში (მაგალითად, ბაზრის მკვეთრი ვარდნის ან ფასების არაპროგნოზირებადი მერყეობის დროს), რაც მას კონკურენტულ ინსტრუმენტად აქცევს თანამედროვე ფინანსური ინჟინერიისთვის.

ლიტერატურა

1. Francesco Audrino, Yujia Hu. Volatility Forecasting: Downside Risk, Jumps and Leverage Effect. Institute of Mathematics and Statistics, Department of Economics, University of St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland. Econometrics2016, 4(1), 8;https://doi.org/10.3390/econometrics4010008.
2. https://lanselin.github.io/introbook_vol1/the-curse-of-dimensionality.html. The Curse of Dimensionality.
3. Kevlishvili G. Optimal Investment Decision-Making Under Financial Risk Mathematical Modelling Constraints. XLI International Conference - Problems Of Decision Making Under Uncertainties, Batumi, Georgia, October 5 – 7, 2026.

A Digital Model for Managing Financial Risks of Investment Operations

Guram Chachanidze
Guram Kevlishvili

Abstract

This paper presents a novel continuous linear-quadratic optimal control framework designed to enhance asset allocation and mitigate systemic financial risks within highly volatile capital markets. By utilizing a dynamic decision-making architecture, the proposed digital model effectively streamlines portfolio management cycles without relying on computationally expensive iterative linear transformations. The underlying mathematical structure incorporates positive definite risk-weighted matrices focused on both transaction cost reduction and terminal risk minimization based on Bellman optimality principles. Furthermore, the local and semi-local convergence parameters of the associated Riccati differential sequences are rigorously established under classical Lipschitz conditions to guarantee stability. Extensive numerical simulations demonstrate that the model exhibits exceptional robustness and mathematical resilience during periods of intense market fluctuations, making it a highly reliable tool for modern corporate financial engineering and algorithmic trading systems.

Keywords: investment operation, financial risk, investment decision, dynamic programming, linear-quadratic regulator (LQR), Riccati matrix differential equation, portfolio optimization, Lipschitz constant, financial engineering, risk-weighting matrix.