0541 მათემატიკა MATHEMATICS

# წარმოებულის სწავლება ზღვრის საწყისი გამოყენების გარეშე: კოგნიტურ-კონსტრუქტივისტული და ალგებრულ-გეომეტრიული მიდგომა

**დავით კაპანაძე**
**E-mail: d.kapanadze@seu.edu.ge**
**საქართველოს ეროვნული უნივერსიტეტი**

**რეფერატი**

სტატიაში წარმოდგენილია წარმოებულის სწავლების კოგნიტურ-კონსტრუქტივისტული მიდგომა, რომელიც წარმოებულის ცნებას ზღვრის ფორმალური განმარტების წინ უძღვის. ტრადიციული მეთოდი მათემატიკურად მკაცრია, თუმცა საწყის ეტაპზე მოსწავლეს/სტუდენტს ერთდროულად რამდენიმე აბსტრაქტული ცნების - ნამატის, სხვაობათა შეფარდების, ზღვარში გადასვლის, ქორდისა და მხების კავშირის - წინაშე აყენებს. ამის საპასუხოდ, სტატიაში განხილულია ალგებრულ-გეომეტრიული მოდელი, რომელიც წარმოებულს აფუძნებს ნაცნობ სტრუქტურებზე: კვადრატულ ფუნქციაზე, ორმაგ ფესვზე და მხების გეომეტრიულ იდეაზე. მითითებულ წერტილში მხები განისაზღვრება მკაცრი მათემატიკური პირობით; ამ კრიტერიუმის საფუძველზე წარმოებული ჩნდება როგორც მხების დახრილობის ფუნქცია, ხოლო ზღვრის კლასიკური ფორმულა - შემდგომ ეტაპზე. წარმოდგენილი მიდგომა ეფუძნება ავტორის მრავალწლიან (1986–2025) პედაგოგიურ გამოცდილებასა და დაკვირვებებს.

**საკვანძო სიტყვები:** წარმოებული; ზღვრის გარეშე სწავლება; ორმაგი ფესვი; მხები; კოგნიტური დატვირთვა; კონსტრუქტივიზმი; ალგებრულ-გეომეტრიული მოდელი.

## შესავალი

წარმოებულის ცნების სწავლება მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მეთოდოლოგიური პრობლემაა. ტრადიციულ კურსში წარმოებული განისაზღვრება სხვაობათა შეფარდების ზღვრის საშუალებით - ეს განმარტება მათემატიკურად მკაცრია, მაგრამ საწყის ეტაპზე მოსწავლეს/სტუდენტს ერთდროულად რამდენიმე ახალი ელემენტის წინაშე აყენებს: ნამატი, სხვაობათა შეფარდება, ზღვარში გადასვლა, ქორდისა და მხების ურთიერთობა. პრაქტიკაში მოსწავლე/სტუდენტი ხშირად სწავლობს გამოთვლის წესებს, მაგრამ სუსტად აცნობიერებს წარმოებულის გეომეტრიულ შინაარსს.

კოგნიტური დატვირთვის თეორიის მიხედვით, სწავლა რთულდება, როდესაც სამუშაო მეხსიერება ერთდროულად ბევრ ახალ ელემენტს ამუშავებს [13]. კონსტრუქტივისტული მიდგომები კი მიუთითებს, რომ ახალი ცოდნა მყარდება, როდესაც ეყრდნობა მოსწავლისთვის/სტუდენტისათვის ნაცნობ სტრუქტურებს [1, 10, 14]. სწორედ ამ პრინციპს ეფუძნება სტატიის მიდგომა: წარმოებულის შემოტანა იწყება კვადრატული ფუნქციით, ორმაგი ფესვითა და მხების ალგებრული კრიტერიუმით.

ძირითადი პირობაა: წრფე $T_a(x)=f(a)+k(x-a)$ განიხილება $f(x)$-ის მხებად $x=a$-ში, თუ $f(x)-T_a(x)=(x-a)^2Q(x)$. ზღვრის გარეშე ამ ტიპის განხილვა Shisha-ს ნაშრომშიც გვხვდება [12]; წინამდებარე სტატიის მიზანია ამ იდეის პედაგოგიური განვითარება კონსტრუქტივისტული სასწავლო მოდელის სახით. მიდგომა 1986 წლიდან ვითარდებოდა სხვადასხვა საგანმანათლებლო დონეზე. დაკვირვებებმა აჩვენა, რომ ორმაგ ფესვთან დაკავშირება მოსწავლეებს/სტუდენტებს უადვილებს წარმოებულის ფუნქციური ბუნების გააზრებასა და ცოდნის ტრანსფერს.

სტატიაში მოდელის ძირითადი მათემატიკური კონსტრუქცია წარმოდგენილია პოლინომების მაგალითზე, რადგან ამ შემთხვევაში ორმაგი ფესვისა და მხების კავშირი მოსწავლისთვის/სტუდენტისთვის განსაკუთრებით თვალსაჩინოა. შემდგომ იგივე ლოგიკა განიხილება როგორც გადასატანი სქემა: მოსწავლე/სტუდენტი მიღებულ კრიტერიუმს იყენებს დიფერენცირების წესებზე და ელემენტარულ ფუნქციებზე, რაც ცოდნის ტრანსფერის შესაძლებლობას ამოწმებს.

## ძირითადი ნაწილი

### *თეორიული ჩარჩო*

ტრადიციული სწავლება ერთდროულად წარუდგენს მოსწავლეს/სტუდენტს ფუნქციის ნამატს, სხვაობათა შეფარდებას, ზღვარში გადასვლასა და ქორდა-მხების ურთიერთობას. ასეთი სიმრავლე ხშირად იწვევს ფორმულის მექანიკურ დამახსოვრებას ცნების არსობრივი გაგების გარეშე. Sweller-ის

კოგნიტური დატვირთვის თეორია ასეთ სიტუაციას სამუშაო მეხსიერების გადატვირთვად განიხილავს [13].

ეს მიდგომა ისტორიულად Cauchy-ს მიერ ჩამოყალიბებული ზღვრის ცნებაზე დაყრდნობით განვითარდა [2], რომელიც XIX საუკუნეში მათემატიკურ ანალიზს მკაცრ საფუძველს ამლევდა, მაგრამ პედაგოგიური ადაპტაციის თვალსაზრისით გამოწვევად რჩება.

Ausubel-ის მიხედვით, ახალი ცოდნა მყარდება მოსწავლის/სტუდენტის წინარე ცოდნაზე დაყრდნობით [1]. Piaget ხაზს უსვამს ცოდნის აქტიური მოქმედებებით - და არა მზა ფორმულის მიღებით - ჩამოყალიბებას [10]. Vygotsky-ის „უახლოესი განვითარების ზონის" პრინციპის მიხედვით, სწავლება ეფექტურია, როდესაც ახალი ცნება არსებულ ცოდნას ოდნავ აღემატება, მაგრამ მასწავლებლის/ლექტორის მხარდაჭერით ხელმისაწვდომია [14].

ამ ჩარჩოში წარმოებულის ზღვრის გარეშე საწყისი მოდელი შუალედური საფეხურია: ზღვრის ცნებას არ აუქმებს, არამედ გადადებს მის ფორმალურ გამოყენებას. ჯერ მოსწავლე/სტუდენტი წარმოებულს ხედავს მხების დახრილობის კრიტერიუმის საფუძველზე, შემდეგ ზღვრის ფორმულა ბუნებრივად ჩნდება როგორც ამ კონსტრუქციის ანალიტიკური გამოხატულება. მოდელი სამ საფუძველს აერთიანებს: კოგნიტურს (ამცირებს საწყის აბსტრაქციას), კონსტრუქტივისტულს - მოსწავლის / სტუდენტის აქტიურ მონაწილეობას ცნების აგებაში. და ალგებრულ-გეომეტრიულს (მხების ინტუიცია გადაიყვანება მკაფიო კრიტერიუმში).

სწავლების ლოგიკა: ორმაგი ფესვი → გეომეტრიული მხებობა → ალგებრული კრიტერიუმი → წრფის დახრილობა → წარმოებულის მნიშვნელობა → წარმოებული, როგორც ფუნქცია.

### *მეთოდი: ალგებრულ-გეომეტრიული კონსტრუქტივისტული მოდელი*

ამ ნაწილში წარმოდგენილია წარმოებულის საწყისი შემოტანის მეთოდი, რომელიც ეფუძნება არა ზღვრის ფორმალურ განმარტებას, არამედ ორმაგი ფესვისა და მხების ალგებრულ-გეომეტრიულ კავშირს. მეთოდის მიზანია, მოსწავლემ/სტუდენტმა წარმოებული ჯერ გაიგოს როგორც მხების დახრილობის მნიშვნელობა, ხოლო შემდეგ - როგორც ფუნქცია, რომელიც თითოეულ წერტილს შესაბამის დახრილობას უსადაგებს.

სასწავლო თანმიმდევრობა ასეთია: ორმაგი ფესვი → გეომეტრიული მხებობა → ალგებრული მხებობის კრიტერიუმი → წრფის დახრილობა → წარმოებულის მნიშვნელობა → წარმოებული, როგორც ფუნქცია → დიფერენცირების წესები → ელემენტარული ფუნქციები → ზღვართან კავშირი.

### *ორმაგი ფესვი და მხებობის იდეა*

მეთოდი იწყება მოსწავლისათვის/სტუდენტისათვის ნაცნობი მაგალითით — კვადრატული ფუნქციით. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=x^2$. ამ ფუნქციის გრაფიკი $x=0$ წერტილში ეხება $x$-ღერძს. ალგებრულად ეს ნიშნავს, რომ $x=0$ არის ფუნქციის ორმაგი ფესვი, რადგან $x^2=(x-0)^2$.

მოსწავლისთვის/სტუდენტისათვის ეს ფაქტი ნაცნობია კვადრატული ფუნქციისა და კვადრატული განტოლების შესწავლიდან: როდესაც კვადრატულ განტოლებას ორმაგი ფესვი აქვს, შესაბამისი პარაბოლა $x$-ღერძს ეხება. ამ ნაცნობი ფაქტიდან იწყება გადასვლა უფრო ზოგად იდეაზე: თუ ფუნქციისა და წრფის სხვაობას მოცემულ წერტილში ორმაგი ფესვი აქვს, მაშინ ეს წრფე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ფუნქციის მხები [5, 6].

### *ალგებრული მხებობის კრიტერიუმი*

ვთქვათ მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია და $x=a$ წერტილი. ამ წერტილში გამავალი ნებისმიერი წრფე შეიძლება ჩაიწეროს სახით

$$T_a(x)=f(a)+k(x-a)$$

სადაც $k$ არის წრფის დახრილობა. ამ წრფეს ვუწოდებთ $f(x)$-ის მხებს $x=a$ წერტილში, თუ სხვაობა $f(x)-T_a(x)$ ნულდება $x=a$-ში მეორე რიგის სიზუსტით, ანუ თუ არსებობს ისეთი ფუნქცია $Q(x)$, რომ

$$f(x)-T_a(x)=(x-a)^2Q(x)$$

პოლინომების შემთხვევაში ეს პირობა ნიშნავს, რომ $f(x)-T_a(x)$ იყოფა $(x-a)^2$-ზე. სწორედ ეს არის მხებობის ალგებრულ-გეომეტრიული კრიტერიუმი.

***წარმოებულის განმარტება***

თუ $x=a$ წერტილში არსებობს ერთადერთი ისეთი $k$ მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$f(x)-[f(a)+k(x-a)]=(x-a)^2Q(x)$$

მაშინ ეს $k$ განისაზღვრება როგორც $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $x=a$ წერტილში. ანუ

$$f'(a)=k$$

ამგვარად, წარმოებული თავდაპირველად ჩნდება როგორც მხების დახრილობა. თუ თითოეულ $a$ წერტილს შეესაბამება თავისი ერთადერთი დახრილობა $k(a)$, მაშინ მიიღება ახალი ფუნქცია $a \mapsto k(a)$. ამ ფუნქციას ვუწოდოთ $f(x)$-ის წარმოებული ფუნქცია.

***მაგალითი: $f(x)=x^2$***

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=x^2$ და ავიღოთ $x=a$ წერტილი. ამ წერტილში გამავალი წრფე ჩავწეროთ სახით $T_a(x)=a^2+k(x-a)$. ვიპოვოთ $k$ ისე, რომ $f(x)-T_a(x)$ იყოფოდეს $(x-a)^2$-ზე. გვაქვს:

$$x^2-[a^2+k(x-a)] = x^2-a^2-k(x-a) = (x-a)(x+a)-k(x-a) = (x-a)(x+a-k)$$

იმისთვის, რომ ეს გამოსახულება იყოფოდეს $(x-a)^2$-ზე, მეორე მამრავლი $x=a$ წერტილში უნდა ნულდებოდეს, ე.ი.

$$a+a-k=0 \Longrightarrow k=2a \Longrightarrow f'(a)=2a \Longrightarrow f'(x)=2x$$

ეს შედეგი მიღებულია ზღვრის გამოყენების გარეშე, მხოლოდ ორმაგი ფესვისა და მხებობის ალგებრული კრიტერიუმის საფუძველზე.

***განზოგადება: $f(x)=x^n$***

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=x^n$, სადაც $n$ არის დადებითი მთელი რიცხვი. $x=a$ წერტილში გამავალი წრფე არის $T_a(x)=a^n+k(x-a)$. უნდა ვიპოვოთ $k$, რომლისთვისაც $x^n-[a^n+k(x-a)]$ იყოფა $(x-a)^2$-ზე. გამოვიყენოთ ცნობილი ფაქტორიზაცია:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$$

მაშინ

$$x^n-[a^n+k(x-a)] = x^n-a^n-k(x-a) = (x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}-k)$$

იმისთვის, რომ ეს გამოსახულება იყოფოდეს $(x-a)^2$-ზე, ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება $x=a$ წერტილში უნდა ნულდებოდეს. რადგან ასეთი წევრი $n$ ცალია, მივიღებთ:

$$n\,a^{n-1}-k=0 \Longrightarrow k=n\,a^{n-1} \Longrightarrow f'(a)=n\,a^{n-1} \Longrightarrow f'(x)=n\,x^{n-1}$$

***მეთოდის პედაგოგიური მნიშვნელობა***

წარმოდგენილ მეთოდში მოსწავლე/სტუდენტი წარმოებულის ცნებას იღებს არა როგორც წინასწარ მოცემულ ფორმულას, არამედ როგორც ალგებრულ-გეომეტრიული ამოცანის გადაწყვეტას. იგი ხედავს, რომ მხების დახრილობა არის ის ერთადერთი $k$ მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ფუნქციასა და წრფეს შორის სხვაობას მოცემულ წერტილში ორმაგი ფესვი აქვს.

ეს მიდგომა ხელს უწყობს რამდენიმე მნიშვნელოვანი იდეის გააზრებას. პირველი, წარმოებული არის არა მხოლოდ რიცხვი, არამედ ცვლადი დახრილობის შესაბამისობა. მეორე, $f'(a)$ არის კონკრეტულ წერტილში მხების დახრილობა, ხოლო $f'(x)$ არის ამ დახრილობებისგან მიღებული ახალი ფუნქცია. მესამე, დიფერენცირების წესები შეიძლება ჩამოყალიბდეს არა მხოლოდ ფორმულების დამახსოვრებით, არამედ მხებობის ერთი და იმავე კრიტერიუმის სისტემატური გამოყენებით.

***დიფერენცირების წესები - კონსტრუქციული გამოყვანა და ცოდნის ტრანსფერი***

მას შემდეგ, რაც წარმოებული განისაზღვრა როგორც მხების დახრილობა ორმაგი ფესვის კრიტერიუმის საფუძველზე, შესაძლებელია დიფერენცირების ძირითადი წესების გამოყვანა იმავე ლოგიკით. ვთქვათ მოცემულია ორი ფუნქცია **f** და **g**. დავუშვათ, რომ **x=a** წერტილში მათთვის არსებობს მხებები, ანუ სრულდება შემდეგი პირობები:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+(x-a)^2Q_1(x)$$

$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+(x-a)^2Q_2(x),$$

რომლებსაც გამოვიყენებთ დიფერენცირებადობის წესების დროს:

***შენიშვნა:*** *პოლინომების ჯამი და ნამრავლი ისევ პოლინომებია, ხოლო განაყოფი, ზოგადად რაციონალურ ფუნქციას იძლევა და ლოკალურად არის განსაზღვრული* ***(x=a)****-ის მახლობლად. ამ მონაკვეთში* ***(f)*** *და* ***(g)*** *განხილულია როგორც ორი დამოუკიდებელი ფუნქცია, რომლებსაც* ***(x=a)****-ში აქვთ მხების ლოკალური წარმოდგენები. სწორედ ეს იძლევა მხებობის კრიტერიუმის სისტემატური გამოყენების საშუალებას ჯამის, ნამრავლისა და განაყოფის წესების გამოსაყვანად.*

***ჯამის წესი***

განვიხილოთ **h(x)=f(x)+g(x).** წინა ჩანაწერების შეკრებით მივიღებთ:

$$h(x)-\{h(a)+[f'(a)+g'(a)](x-a)\}=(x-a)^2[Q_1(x)+Q_2(x)]$$

ეს ნიშნავს, რომ **h(x)=f(x)+g(x)** ფუნქციის მხების დახრილობა **x=a** წერტილში არის **f'(a)+g'(a).** მაშასადამე,

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$$

საიდანაც მიიღება ზოგადი წესი

$$(f+g)'=f'+g'$$

***მოსწავლის/სტუდენტის სავარჯიშოები - ცოდნის ტრანსფერის შეფასება***

ჯამის წესის გამოყვანის განხილვის შემდეგ მოსწავლეებს/სტუდენტებს ეძლევათ დამოუკიდებელი სავარჯიშოები ცოდნის ტრანსფერის შესაფასებლად:

**სავარჯიშო 1 - ნამრავლის წესი: (fg)' = f'g + fg'**

***მინიშნება:*** ჩაწერეთ **fg**-ის მხებობის პირობა **x = a**-ში. გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ **g(x)** უწყვეტია და **g(a)≠0** გულისხმობს **g(x)≠0-ს |x–a|**-ის საკმარისად მცირე მნიშვნელობებისათვის.

$$(fg)(x) - [(fg)(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))(x - a)]$$

გაყოფადია **$(x - a)^2$** -ზე.

**სავარჯიშო 2 -** წილადის წესი: **$(f/g)' = (f'g - fg') / g^2$,** სადაც **g(a) ≠ 0**

***მინიშნება:*** ჩაწერეთ **f/g**-ის მხებობის პირობა. გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ **g(x)** უწყვეტია და **g(a) ≠ 0** გულისხმობს **g(x) ≠ 0 |x - a|**-ის საკმარისად მცირე მნიშვნელობებისათვის. გადაამოწმეთ, რომ დახრილობაა **[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)] / [g(a)]².**

**სავარჯიშო 3 -** კომპოზიციის წესი: **$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$**

***მინიშნება:*** ჩაწერეთ **g(f(x))**-ის მხებობის პირობა. შეიყვანეთ **t = f(x);** გამოიყენეთ **f(x)**-ის მხების მიახლოება **x = a**-ში, შემდეგ **g(t)**-ის მხების მიახლოება **t = f(a)**-ში. დაადასტურეთ, რომ შედეგი გაყოფადია **$(x-a)^2$**-ზე კოეფიციენტით **g'(f (a)) · f'(a).**

ამ დავალებების შესრულება აჩვენებს, შეუძლიათ თუ არა მოსწავლეებს/სტუდენტებს მიღებული ლოგიკის ახალ შემთხვევებზე გადატანა ცოდნის ტრანსფერის გზით [1, 3, 11].

*წარმოებულის არარსებობა: f(x)=|x| ფუნქციის მაგალითი*

ალგებრულ-გეომეტრიული კრიტერიუმი მხოლოდ წარმოებულის არსებობის შემთხვევებს არ აღწერს. იგი ასევე კარგად აჩვენებს, როდის არ არსებობს წარმოებული. ამისთვის განვიხილოთ ფუნქცია **f(x)=|x|, x=0** წერტილში.

ვცადოთ ვიპოვოთ **x=0**-ში გამავალი წრფე **T(x)=kx,** რომლისთვისაც სხვაობა **|x|–kx** ნულდება მეორე რიგის სიზუსტით, ანუ იყოფა **x²**-ზე.

თუ **x>0,** მაშინ **|x|–kx=(1–k)x,** ამიტომ **k=1**.

თუ **x<0,** მაშინ **|x|–kx=(–1–k)x,** ამიტომ **k=–1.**

მარჯვნიდან მიღებული დახრილობა არის **k=1**, ხოლო მარცხნიდან მიღებული დახრილობა არის **k=–1.** ერთი და იგივე **k** მნიშვნელობა, რომელიც ორივე მხრიდან დააკმაყოფილებდა მხებობის ორმაგი ფესვის კრიტერიუმს, არ არსებობს. შესაბამისად, **f′(0)** არ არსებობს [7, 9].

*ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულები - მოდელის გაფართოება*

წინა ქვეთავებში წარმოებული განისაზღვრა ორმაგი ფესვისა და მხების ალგებრულ-გეომეტრიული კრიტერიუმის საფუძველზე. პოლინომების შემთხვევაში ეს კრიტერიუმი განსაკუთრებით თვალსაჩინოა, რადგან იგი პირდაპირ უკავშირდება გაყოფადობას $(x–a)^2$-ზე. შესაბამისი ლოკალური წარმოდგენების გამოყენებით იგივე იდეა შეიძლება გავრცელდეს ელემენტარულ ფუნქციებზეც. სრული მათემატიკური დასაბუთება მოცემულია [7]-ში, ხოლო ამ სტატიაში მოყვანილია სასწავლო ტრანსფერის მაგალითები, რომლებიც აჩვენებს, როგორ შეუძლია მოსწავლეს/სტუდენტს მიღებული ალგებრულ-გეომეტრიული ლოგიკის ახალ ფუნქციებზე გადატანა.

*ექსპონენციალური ფუნქცია*

განვიხილოთ **f(x)=e^x**. გამოვიყენოთ უკვე ცნობილი ლოკალურ განვრცობა **t=0**-ის მახლობლად:

$$e^t=1+t+t^2R(t),\ \ R(0)=1/2$$
$$e^t–(1+t)=t^2R(t)$$

ეს ნიშნავს, რომ **y=1+t** არის **y=e^t** ფუნქციის მხები **t=0** წერტილში. ახლა გადავიდეთ ნებისმიერ **x=a** წერტილზე და ჩავწეროთ **t=x–a.** მაშინ

$$e^x=e^ae^{x–a} \implies e^x=e^a[1+(x–a)+(x–a)^2R(x–a)] \implies$$
$$\implies e^x=e^a+e^a(x–a)+(x–a)^2e^aR(x–a) \implies T_a(x)=e^a+e^a(x–a) \implies$$
$$\implies (e^x)'=e^x$$

*შებრუნებული ფუნქციის პრინციპი*

თუ **y=f(x)** ლოკალურად შექცევადია **x=a** წერტილის მახლობლად და **f′(a)≠0**, მაშინ მისი შებრუნებული ფუნქცია **x=f^{–1}(y)** გეომეტრიულად მიიღება **y=x** წრფის მიმართ სიმეტრიით. ამ სიმეტრიის დროს შესაბამისი მხებების დახრილობები ურთიერთშებრუნებულია. თუ **y₀=f(a),** მაშინ

$$(f^{-1})'(y_0)=1/f'(a) \implies (f^{-1})'(f(a))=1/f'(a)$$

*მოსწავლის/სტუდენტის სავარჯიშოები - ცოდნის აგებისა და ტრანსფერის შემოწმება*

ქვემოთ მოცემული სავარჯიშოები მიზნად ისახავს იმის შემოწმებას, შეძლებს თუ არა მოსწავლე/სტუდენტი მიღებული ალგებრულ-გეომეტრიული ლოგიკის გადატანას ახალ ფუნქციებზე. ამ ეტაპზე მოსწავლეს/სტუდენტს აღარ ეძლევა მხოლოდ მზა ფორმულა; მას ეძლევა მინიშნება, რომლის საფუძველზეც დამოუკიდებლად უნდა დაასაბუთოს შესაბამისი შედეგი.

APOS-ის პერსპექტივიდან, ეს პროცესი შეიძლება განვიხილოთ როგორც გადასვლა მოქმედებიდან პროცესზე, პროცესიდან კი ობიექტზე [3]. ამავე დროს, მტკიცების სქემების განვითარების თვალსაზრისით, მოსწავლე/სტუდენტი თანდათან გადადის ინტუიციური ახსნიდან უფრო სტრუქტურულ დასაბუთებაზე [4].

**სავარჯიშო 1 - ლოგარითმული ფუნქცია**

დაამტკიცეთ, რომ **(ln x)′=1/x.**

**მინიშნება:** $(\ln x)$ არის $(e^x)$-ის შებრუნებული ფუნქცია. რადგან $(e^x)'=e^x$, შებრუნებული ფუნქციის პრინციპით მიიღება:

$$(\ln x)'=1/x.$$

**სავარჯიშო 2 - ექსპონენციალური ფუნქცია ზოგადი ფუძით**

დაამტკიცეთ, რომ

$(a^x)'=a^x \ln a$, სადაც $(a>0)$, $(a\neq1)$.

***მინიშნება:*** გამოიყენეთ წარმოდგენა

$$a^x = e^{x \ln a}$$

კომპოზიციის წესი და ის ფაქტი, რომ $(e^x)'=e^x$.

**სავარჯიშო 3 - ლოგარითმი ნებისმიერი ფუძით**

დაამტკიცეთ, რომ

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \text{ სადაც } (a>0), \quad (a\neq1).$$

***მინიშნება:*** გამოიყენეთ ფორმულა

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

**სავარჯიშო 4 - რაციონალური ხარისხები**

დაამტკიცეთ, რომ

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \qquad (x> 0)$$

ხოლო ზოგადად

$$(x^{m/n})' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

***მინიშნება:*** განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=x^n$, სადაც $n$ დადებითი მთელი რიცხვია. დადებით ნახევარღერძზე მისი შებრუნებული ფუნქციაა

$$f^{-1}(x)=x^{1/n}.$$

გამოიყენეთ შებრუნებული ფუნქციის პრინციპი, ზოგადი ფორმულის მისაღებად კი ხარისხის და კომპოზიციის წესები.

***ტრიგონომეტრიული ფუნქციები***

დაამტკიცეთ, რომ

$$(\sin x)'=\cos x, \quad (\cos x)'=-\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{(1+x^2}$$

***მინიშნება:*** განიხილეთ ერთეულოვან წრეწირზე მოძრავი წერტილი

$$(\cos t, \sin t).$$

ამ წერტილში რადიუს-ვექტორია $(\cos t, \sin t)$. წრეწირის მხების მიმართულება რადიუსის მართობულია. ვექტორი $(-\sin t, \cos t)$ ორთოგონალურია რადიუს-ვექტორისა, რადგან

$$(\cos t, \sin t)\cdot(-\sin t, \cos t)=-\cos t \sin t+\sin t \cos t=0.$$

$\tan x$ და $\cot x$ განიხილეთ როგორც $\sin x$-ისა და $\cos x$-ის ფარდობები და გაიხსენეთ განაყოფის წარმოებული. რაც შეეხება შებრუნებულ ტრიგონომეტრიულ ფორმულებს, აქ გამოგვადგება შებრუნებული ფუნქციების წარმოებულების ურთიერთდამოკიდებულების წესი.

**კვლევა და შეფასება**

***კვლევის ეტაპები*** - პედაგოგიური დაკვირვება სამ ეტაპად იყოფა.

**I ეტაპზე** დაფიქსირდა სირთულეები, რომლებიც წარმოიქმნება, როდესაც წარმოებული პირველივე ნაბიჯზე სხვაობათა შეფარდების ზღვრით განისაზღვრება.

**II ეტაპზე** შემოწმდა ალგებრულ-გეომეტრიული მიდგომის საწყისი ვერსია - კვადრატული ფუნქციით, ორმაგი ფესვითა და მხების ალგებრული კრიტერიუმით; ყურადღება გამახვილდა იმაზე, შეძლებდნენ თუ არა სტუდენტები წარმოებულის გაგებას ჯერ მხების დახრილობად, შემდეგ კი ფუნქციად. ამ ეტაპზე მონაწილეობდა ორი პარალელური ჯგუფი - 20+20 მოსწავლე/სტუდენტი.

**III ეტაპზე** მიდგომა გაფართოვდა დიფერენცირების წესებზე, ელემენტარულ ფუნქციებსა და ზღვართან კავშირზე; ყურადღება - ცოდნის ტრანსფერზე: ერთი კრიტერიუმის გამოყენება ჯამის, ნამრავლის, წილადისა და კომპოზიციის შემთხვევებში.

***შეფასების ინდიკატორები***

მოსწავლე/სტუდენტთა პასუხები ფასდებოდა ცნების გააზრების ხარისხით, არა მხოლოდ სწორი შედეგით. გამოიკვეთა სამი დონე:

**I დონე - პროცედურული:** მოსწავლე/სტუდენტი ითვლის **f′(x)**-ს, მაგრამ ყოველთვის ვერ ხსნის წესების კავშირს მხებთან.

**II დონე - სტრუქტურული:** მოსწავლე/სტუდენტი ხსნის, რატომ ჩნდება **$(x-a)^2$** პირობა და ხედავს **f′(a)**-ის ლოკალურ გეომეტრიულ მნიშვნელობას.

**III დონე - განმაზოგადებელი:** მოსწავლე/სტუდენტი კრიტერიუმს ახალ ფუნქციებზე გადაიტანს და სვამს კითხვებს |x|, $e^x$, ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისა და დიფერენცირების წესების შესახებ.

***შედარებითი დაკვირვებები***

ტრადიციული მიდგომისას მოსწავლე/სტუდენტი ფლობს ფორმულას

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

მაგრამ ზოგჯერ ვერ ხსნის მის გეომეტრიულ შინაარსს. ალგებრულ-გეომეტრიული მიდგომისას წარმოებული ჩნდება კონკრეტული ამოცანის გადაწყვეტად: მოიძებნოს ისეთი წრფე, რომ ფუნქციასა და წრფეს შორის სხვაობა **$(x-a)^2$**-ზე გაიყოს; **f′(a)** - ამ წრფის დახრილობაა, ხოლო **f′(x)** - დახრილობათა ცვლადი შესაბამისობა.

***შედარებითი ცხრილი***

| კრიტერიუმი | ტრადიციული მიდგომა | ალგებრულ-გეომეტრიული მიდგომა |
|---|---|---|
| წარმოებულის საწყისი აღქმა | ზღვრის ფორმულა | მხების დახრილობის ფუნქცია |
| მხების გაგება | ქორდის ზღვრული მდებარეობა | ორმაგი ფესვის ალგებრული კრიტერიუმი |
| f′(a)-ის შინაარსი | ხშირად აღიქმება გამოთვლის შედეგად | კონკრეტულ წერტილში მხების დახრილობა |
| f′(x)-ის ინტერპრეტაცია | ხშირად აღიქმება ფორმულად | ცვლადი დახრილობებისგან მიღებული ახალი ფუნქცია |
| f′(a)=0-ის გაგება | ზოგჯერ აიგივებენ ექსტრემუმთან | ჰორიზონტალური მხები; ექსტრემუმი ცალკე საკითხია |
| წარმოებულის არარსებობა | ხშირად უკავშირდება ზღვრის არარსებობას | აიხსნება ერთადერთი მხების არარსებობით |
| მოსწავლე/სტუდენტის კითხვები | ძირითადად პროცედურული | სტრუქტურული და განმაზოგადებელი |

***ინტერაქტიული ვიზუალიზაცია***

მოდელის გასააზრებლად გამოყენებულ იქნა ავტორის მიერ შექმნილი ინტერაქტიული პლატფორმა

https://kapanadze-theory.streamlit.app/ [8], რომელიც სამ ეტაპს მოიცავს: ორმაგი ფესვი და მხები; ქორდის მხებისკენ მოძრაობა; წარმოებული, როგორც ფუნქცია. პირველ ეტაპზე მოსწავლე/სტუდენტი **k** პარამეტრს არეგულირებს და ხედავს, სად ნულდება სხვაობა $f(x)-T_a(x)$ მეორე რიგის სიზუსტით. მეორე ეტაპზე ქორდის მხებთან დაახლოება ზღვრის იდეას გეომეტრიული პროცესის ანალიტიკურ აღწერად წარმოაჩენს. მესამე ეტაპზე **a**-ს გადაადგილებით ჩანს $f'(x)$-ის ჩამოყალიბება - $f(x)=x^2$-ისთვის ეკრანზე თანდათან იკვეთება $f'(x)=2x$. პლატფორმის პედაგოგიური გამოყენება დეტალურად განხილულია [9]-ში.

***ზღვართან კავშირი***

წარმოდგენილი მიდგომა არ უარყოფს ზღვრის მნიშვნელობას მათემატიკურ ანალიზში. პირიქით, მისი მიზანია ზღვრის ფორმულის შემოტანა იმ ეტაპზე, როდესაც მოსწავლეს/სტუდენტს უკვე აქვს წარმოებულის გეომეტრიული და ალგებრული შინაარსის საწყისი გაგება. განვიხილოთ წერტილები $A(x_0, f(x_0))$ და $B(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. ამ წერტილებში გამავალი ქორდის დახრილობაა

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

როდესაც $\Delta x$ უახლოვდება ნულს, ქორდა უახლოვდება მხებს. მხები კი უკვე აგებულია ალგებრულ-გეომეტრიული კრიტერიუმით, მაშინ ქორდის დახრილობის ზღვრული მნიშვნელობა ემთხვევა მხების დახრილობას. ამგვარად მიიღება კლასიკური ფორმულა:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

ამ მიდგომაში ზღვარი ჩნდება როგორც შედეგი და არა როგორც საწყისი განმარტება. სწავლების ლოგიკა შეიძლება შეჯამდეს ასე: ორმაგი ფესვი → მხები → დახრილობა → წარმოებული → დიფერენცირების წესები → ელემენტარული ფუნქციები → ზღვრის ფორმულა.

ელემენტარული ფუნქციებისთვის კონსტრუქციის სრული მათემატიკური დასაბუთება მოცემულია [7]-ში.

## დასკვნა

წარმოდგენილი მოდელის მთავარი კრიტერიუმია: $T_a(x)=f(a)+k(x-a)$ განიხილება $f(x)$-ის მხებად $x=a$-ში, თუ

$$f(x)-T_a(x)=(x-a)^2Q(x);$$

**k**-ს ერთადერთობის შემთხვევაში $f'(a)=k$. წარმოებული ჯერ ჩნდება მხების დახრილობად, შემდეგ - ფუნქციად, რომელიც თითოეულ წერტილს შესაბამის დახრილობას უსადაგებს.

მიდგომა ამცირებს საწყის კოგნიტურ დატვირთვას, ამკვიდრებს $f'(a)$-ის გეომეტრიულ შინაარსს, განასხვავებს $f'(a)=0$-სა და ექსტრემუმს და დიფერენცირების წესების კონსტრუქციულ გაგებას უწყობს ხელს. მოსწავლე/სტუდენტი წარმოებულს აღიქვამს ფუნქციის ლოკალური ქცევის აღმწერ ობიექტად და არა მხოლოდ გამოთვლის წესად. შედეგები ეფუძნება ავტორის პრაქტიკას და საჭიროებს სტანდარტიზებულ ემპირიულ შემოწმებას სხვა მასწავლებლების/ლექტორისა და სასწავლო გარემოს ჩართვით.

ალგებრულ-გეომეტრიული მიდგომა კლასიკურ ანალიზს არ ცვლის - ქმნის წინარე კონცეპტუალურ საფეხურს, რომლის საფუძველზეც ზღვრის ფორმულა მოსწავლეებისათვის / სტუდენტისთვის გასაგები და ბუნებრივი ხდება.

**ლიტერატურა**

1. Ausubel, D. P. (1968). Educational Psychology: A Cognitive View. New York: Holt, Rinehart & Winston.
2. Cauchy, A. L. (1821). Cours d’analyse de l’École Royale Polytechnique. Paris: de Bure frères.
3. Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level (pp. 275–282). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

4. Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education III (pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.
5. კაპანაძე, დ. (1993). პოლინომების ქცევის შესწავლა წარმოებულების გამოყენებით. თბილისი: ი. გოგებაშვილის სახელობის ეროვნული პედაგოგიური ინსტიტუტის გამომცემლობა.
6. კაპანაძე, დ. (2005). ფუნქციის ცნების შემოტანის მეთოდიკა. ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში, №1, თბილისი.
7. Kapanadze, D. (2026). A limit-free algebraic-geometric construction of derivatives for elementary functions. arXiv:2605.20228.
8. Kapanadze, D. (2026). Interactive platform for the algebraic-geometric tangent model. https://kapanadze-theory.streamlit.app/
9. Kapanadze, D. (2026). Teaching the derivative through an algebraic-geometric tangent model and dynamic visualization. International Journal on Integrating Technology in Education, 15(2).
10. Piaget, J. (1970). Science of Education and the Psychology of the Child. New York: Orion Press.
11. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36.
12. Shisha, O. (1986). The derivative without limits. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 113, 280–287.
13. Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. Cognitive Science, 12(2), 257–285.
14. Vygotsky, L. S. (1978). Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

## Teaching the Derivative Without Initial Reliance on Limits: A Cognitive-Constructivist and Algebraic-Geometric Approach

**Davit Kapanadze**

**Abstract**

This article presents a cognitive-constructivist approach to teaching the derivative, in which the concept of the derivative is introduced prior to the formal definition of limit. The traditional method is mathematically rigorous; however, at the initial stage it confronts the learner with several abstract notions at once, including increment, difference quotient, passage to the limit, and the relationship between a secant and a tangent. In response to this difficulty, the article discusses an algebraic-geometric model that grounds the derivative in familiar structures: the quadratic function, the double root, and the geometric idea of tangency. At the point (x=a), the tangent is defined by the condition $\mathbf{f(x)-T_a(x)=(x-a)^2Q(x);}$ On the basis of this criterion, the derivative emerges as the function of tangent slopes, while the classical limit formula is introduced at a later stage. The proposed approach is based on the author's long-term pedagogical experience and observations conducted between 1986 and 2025.

**Keywords:** derivative; limit-free teaching; double root; tangent; cognitive load; constructivism; algebraic-geometric model.