ს ა ე რ თ ა შ ო რ ი ს ო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ი ნ ტ ე ლ ე ქ ტ ი“
I N T E R N A T I O N A L PERIODICAL SCIENTIFIC JOURNAL “I N T E L E C T I”
№3(70), 2021

0111 განათლების მეცნიერება EDUCATION SCIENCE

ზაკურ ზაკურაძე, პაპუნა ზერმულიშვილი
ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
Kutaisi Akaki Tsereteli State University. Georgia

პარამეტრის მეთოდის გამოყენება ზოგიერთი სახის არასტანდარტული განტოლების ამოხსნის დროს

არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის დროს გამოიყენება სხვადასხვა სახის განსხვავებული მეთოდი, რომელთა კლასიფიცირება სირთულეებთან არის დაკავშირებული და უმრავლეს შემთხვევაში შეუძლებელიც კია, რადგან ასეთი მეთოდები გამოიყენება ამოცანათა ძალიან ვიწრო წრისათვის. მეორეს მხრივ, სასწავლო პრაქტიკაში მასწავლებელსაც და მოსწავლეებსაც უამრავი სხვადასხვა სახის არასტანდარტული ამოცანის ამოხსნა უხდებათ, რაც აუცილებელს ხდის ასეთი მეთოდებისა და წესების ცოდნას, რათა წარმატებით განხორციელდეს არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა.

განვიხილოთ ერთი ასეთი მეთოდი, რომელიც პარამეტრის მეთოდის სახელითაა ცნობილი და მისი გამოყენება ამარტივებს ზოგიერთი სახის არასტანდარტული განტოლებების ამოხსნას. მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში: განტოლების ამოსახსნელად შემოგვაქვს პარამეტრი და ვიხილავთ ამოსახსნელი განტოლებისაგან გაცილებით უფრო ზოგადი სახის პარამეტრის შემცველ განტოლებას, რომლიდანაც ამოსახსნელი განტოლება მიიღება პარამეტრის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის. ამოვხსნით პარამეტრის შემცველ განტოლებას და შემდეგ ვუბრუნდებით მოცემული განტოლების ამოხსნას პარამეტრის იმ კონკრეტული მნიშვნელობისათვის, რომელზეც პარამეტრული განტოლება ემთხვევა ამოსახსნელ განტოლებას. ასეთი მიდგომის განხორციელებისას აუცილებელი ხდება განტოლების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენა, რადგან ამოსახსნელი განტოლებიდან პარამეტრის შემცველ განტოლებაზე გადასვლის დროს ზოგჯერ ფართოვდება ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე და შესაძლებელია გარეშე ფესვის გაჩენა.

განვიხილოთ პრაქტიკული მაგალითები.

ამოცანა 1. ამოხსნებით განტოლება

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0.$$

ამოხსნა. საკმაოდ რთული განტოლებაა, თანაც კუბური. მისი ამოხსნა სასკოლო პროგრამის ფარგლებს ცილდება, მაგრამ თუ მოსწავლეებს შევასწავლით ამ განტოლების სახის განტოლებების ამოხსნის კერძო ხერხს, მაშინ მოსწავლეების პირველი შთაბეჭდილება, რომ ამ განტოლებას ვერ ამოხსნიდნენ, გაქარწყლდება. თუ განტოლების ამოხსნის შემდეგ მოსწავლეებს ვკითხავთ განტოლების სირთულის შესახებ, მათი შეფასებაა, რომ განტოლება არც ისე რთულია და მისი ამოხსნის მეთოდის ათვისება არათუ მაღალი კლასის, მერვე კლასის მოსწავლისთვისაც მისაწვდომია. მოსწავლეებმა დაკვირვებით უნდა შეისწავლონ განტოლება, მაგრამ ისმის კითხვა, რაზე უნდა გაამახვილონ ყურადღება სანამ განტოლების ამოხსნა დაიწყებენ? ისინი ამჩნევენ, რომ განტოლების ჩანაწერში არც მსგავსი წევრებია, არც იმის შესაძლებლობა ჩანს, რომ განტოლების ფესვს ზეპირად გამოვთვლიან, შემდეგ მოცემულ განტოლებას გაყოფენ ორწევრზე და მიღებულ კვადრატულ განტოლებასაც ამოხსნიან. მაშ როგორ მოიქცნენ? პარამეტრის შემოსაღებად ერთი ვარიანტი რჩება. განტოლებაში გვაქვს $\sqrt{2}$ და 2. შემოვიღოთ პარამეტრი და მოცემული განტოლება ჩავწეროთ ასე:

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0.$$

პარამეტრებიანი განტოლება მოცემულ განტოლებას ემთხვევა, როცა $a=\sqrt{2}$.

მიღებული პარამეტრული განტოლება ამოვხსნათ როგორც კვადრატული განტოლება a -ს მიმართ. გვაქვს:

$$a^2 - ax^2 + \left(x^3 - x^2\right) = 0.$$

კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტია:

$$D = x^4 - 4\left(x^3 - x^2\right) = x^2\left(x^2 - 4x + 4\right) = x^2\left(x-2\right)^2.$$

მისი ფესვებია:

$$a_{1,2} = \frac{x^2 \pm x(x-2)}{2}.$$

საიდანაც,

$$a_1 = x^2 - x, \quad a_2 = x.$$

რადგან $a = \sqrt{2}$, ამიტომ მივიღეთ ორი განტოლება x -ის მიმართ:

$$ax^2 - x - \sqrt{2} = 0 \text{ და } x = \sqrt{2}.$$

საიდანაც მივიღებთ მოცემული განტოლების სამ ფესვს:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2} \text{ და } x_3 = \sqrt{2}.$$

ამოცანა 2. ამოხსენით განტოლება

$$x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0.$$

ამოხსნა. ამ განტოლების ამოსახსნელად უკვე გარკვეული გამოცდილება გვაქვს დაგროვებული, რომელიც წინა განტოლების ამოხსნით შევიძინეთ და მოსწავლეები ადვილად ახდენენ პარამეტრის შემოღებას და იხილავენ პარამეტრულ განტოლებას:

$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0.$$

პარამეტრული განტოლებიდან ამოსახსნელი განტოლება მიიღება მაშინ, როცა $a = \sqrt{3}$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ მიღებული პარამეტრული განტოლება წარმოადგენს კვადრატულ განტოლებას a პარამეტრის მიმართ:

$$a^2 - a\left(2x^2 + 1\right) + \left(x^4 + x\right) = 0.$$

ამოვხსნათ ეს კვადრატული განტოლება.

მისი დისკრიმინანტია

$$D = \left(2x^2 + 1\right)^2 - 4\left(x^4 + x\right) = 4x^2 - 4x + 1 = \left(2x - 1\right)^2.$$

საიდანაც,

$$a_{1,2} = \frac{\left(2x^2 + 1\right) \pm \left(2x - 1\right)}{2}.$$

ანუ,

$$a_1 = \frac{2x^2 + 1 + 2x - 1}{2} = x^2 + x \text{ და } a_2 = \frac{2x^2 + 1 - 2x + 1}{2} = x^2 - x + 1.$$

რადგან $a = \sqrt{3}$, ამიტომ მივიღებთ ორ კვადრატულ განტოლებას x -ის მიმართ:

$$x^2 - x + 1 = \sqrt{3} \text{ და } x^2 + x = \sqrt{3} .$$

რომელთა ფესვებია:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2} \text{ და } x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2} .$$

ამოცანა 3. ამოხსენით განტოლება

$$x^3 - \left(\sqrt{7} + 1\right)x^2 + x + 7 - \sqrt{7} = 0.$$

ამოხსნა. ამ განტოლების ამოხსნა მოსწავლეებისათვის სირთულეს აღარ წარმოადგენს. ისინი ხვდებიან, რომ ამ განტოლების ამოსახსნელად გამოსავალი ისევ პარამეტრულ განტოლებაზე გადასვლაა, რასაც ისინი უკვე მასწავლებლის ჩარევის გარეშეც ახორციელებენ. ისინი იხილავენ პარამეტრულ განტოლებას:

$$x^3-(p+1)x^2+x+p^2-p=0,$$

რომელიც ამოსახსნელ განტოლებას დაემთხვევა როცა $p=\sqrt{7}$.

ამის შემდეგ მოსწავლეები ახდენენ პარამეტრულ განტოლების ჩაწერას სახით:

$$p^2-p\left(x^2+1\right)+\left(x^3+x^2+x\right)=0.$$

ითვლიან მის დისკრიმინანტს

$$D=\left(x^2+1\right)^2-4\left(x^3+x^2+x\right)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1=(x-1)^4.$$

საიდანაც, განტოლების ფესვებია:

$$p_{1,2}=\frac{\left(x^2+1\right)\pm(x-1)^2}{2}.$$

$$p_1=\frac{x^2+1+x^2-2x+1}{2}=x^2-x+1,\quad p_2=\frac{x^2+1-x^2+2x-1}{2}=x.$$

რადგან $p=\sqrt{7}$, ამიტომ $x^2-x+1=\sqrt{7}$ და $x=\sqrt{7}$.

საიდანაც, მიღებული განტოლების ფესვებია:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2},\quad x_3=\sqrt{7}.$$

ამოცანა 4. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x-5.$$

ამოხსნა. ამ განტოლების ამოსახსნელად პარამეტრის გამოყენების არანაირი შესაძლებლობა არ ჩანს. ამიტომ განტოლების ამოხსნა დავიწყოთ ტრადიციულად, როგორც ვხსნით ირაციონალურ განტოლებას. დავადგინოთ განტოლებაში შემავალი x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

გვაქვს:

$$\begin{cases}45-2x\ge 0,\\ 35-2\sqrt{45-2x}\ge 0,\\ x-5\ge 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 22{,}5,\\ 2\sqrt{45-2x}\le 35,\\ x\ge 5,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\le x\le 22{,}5,\\ 4(45-2x)\le 1225,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\le x\le 22{,}5,\\ x\ge -130\dfrac{5}{8},\end{cases}\Rightarrow 5\le x\le 22{,}5.$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი:

$$y=\sqrt{45-2x}.$$

მაშინ,

$$x=\frac{45-y^2}{2}.$$

ამოსახსნელი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$2\sqrt{35-2y}=35-y^2.$$

სადაც $0\le y\le\sqrt{35}$.

მიღებული განტოლების ორთავე მხარის კვადრატში აყვანა მიზანშეწონილი არ არის, რადგან მივიღებთ მეოთხე ხარისხის განტოლებას y ცვლადის მიმართ.

მოსწავლეების ყურადღებას იქცევს ის, რომ ამ განტოლებაშიც, როგორც წინა განტოლებებში მეორდება ერთი რიცხვი 35, რაც გვიბიძგებს იმისკენ, რომ გამოვიყენოთ პარამეტრი და განტოლება ჩავწეროთ სახით:

$$2\sqrt{a-2y}=a-y^2,$$

რომელიც ამოსახსნელ განტოლებას ემთხვევა იმ შემთხვევაში, როცა $a=35$.

მიღებული განტოლების ორთავე მხარის კვადრატში ახარისხების შემდეგ მივიღებთ განტოლებას a პარამეტრის მიმართ. გვაქვს:

$$a^2-2a(y^2+2)+(y^4+8y)=0.$$

რომლის დისკრიმინანტია

$$\frac{D}{4}=(y^2+2)^2-(y^4+8y)=y^4+4y^2+4-y^4-8y=4(y^2-2y+1)=(2(y-1))^2.$$

საიდანაც,

$$a_{1,2}=(y^2+2)\pm 2(y-1).$$

გვაქვს:

$$a_{1,2}=y^2+2y,\quad a_2=y^2-2y+4.$$

რადგან $a=35$, ამიტომ მივიღებთ ორ კვადრატულ განტოლებას y -ის მიმართ:

$$y^2+2y-35=0 \text{ და } y^2-2y-31=0.$$

რომელთა ფესვებიდან ერთადერთი $y=5$ აკმაყოფილებს პირობას $0\le y\le\sqrt{35}$.

რადგან $x=\dfrac{45-y^2}{2}$ და $y=5$. ამიტომ $x=10$. ე.ი. მოცემული განტოლების ამონახსნია $x=10$.

განხილული ყველა მაგალითის ამოხსნის ალტერნატიული შესაძლებლობა ჩვენ არ გვქონდა, რის გამოც იძულებული ვიყავით გვესარგებლა პარამეტრის შემოღებით. ახლა განვიხილოთ ისეთი მაგალითი, რომელიც შეიძლება ამოიხსნას სხვაგვარი მიდგომითაც და ვაჩვენოთ, რომ პარამეტრული მეთოდის გამოყენება უკეთეს შედეგს იძლევა, როგორც დროის დაზოგვის, ისე ამოხსნის ვიზუალური მხარის თვალსაზრისითაც.

ამოცანა 5. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{5-x}=x^2-5.$$

ამოხსნა. I ხერხი. რადგან $5-x\ge 0$ და $x^2-5\ge 0$, ამიტომ x ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა $x\le\sqrt5$ და $\sqrt5\le x\le 5$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt{5-x}=y$, საიდანაც $5=y^2+x$ და ამოსახსნელი განტოლება ჩაიწერება ასე: $y=x^2-y^2-x,$ საიდანაც მივიღებთ განტოლებას

$$(x+y)(x-y-1)=0.$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1. ვთქვათ, $x+y=0,$ მაშინ $x+\sqrt{5-x}=0.$ რადგან $5-x\ge 0$, ამიტომ $x\le 0$ და $x\le -\sqrt5$.

განტოლებიდან $x+\sqrt{5-x}=0$ მივიღებთ $x^2+x-5=0,$ საიდანაც

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}.$$

რადგან $x\le-\sqrt5$, ამიტომ $x+\sqrt{5-x}=0$ განტოლების ფესვია $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}.$

2. ვთქვათ, $x-y-1=0,$ მაშინ $x-1=\sqrt{5-x},$ სადაც $\sqrt5\le x\le 5.$ ავიყვანოთ განტოლების ორთავე მხარე კადრატში და მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას

$$x^2-x-4=0,$$

რომლის ფესვებია

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}.$$

რადგან $\sqrt{5}\le x\le 5$, ამიტომ $x-1=\sqrt{5-x}$ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი $x_3=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

II ხერხი. პარამეტრის მეთოდის გამოყენებით. ამოსახსნელი განტოლება ჩავწეროთ პარამეტრის სახით:

$$\sqrt{a-x}=x^2-a.$$

რომელიც მოცემულ განტოლებას დაემთხვევა, როცა $a=5$. პარამეტრული განტოლების ორთავე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში. გვექნება:

$$a^2-a\left(2x^2+1\right)+\left(x^4+x\right)=0.$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება როგორც კვადრატული განტოლება a პარამეტრის მიმართ.

$$D=\left(2x^2+1\right)^2-4\left(x^4+x\right)=4x^2+4x+1=\left(2x+1\right)^2.$$

საიდანაც, განტოლების ფესვებია:

$$a_{1,2}=\frac{\left(2x^2+1\right)\pm\left(2x+1\right)}{2}.$$

$$a_1=\frac{2x^2+1+2x+1}{2}=x^2+x+1,\ \ a_2=\frac{2x^2+1-2x-1}{2}=x^2-x.$$

რადგან $a=5$, ამიტომ $x^2+x+1=5$ და $x^2-x=5$.

საიდანაც, პარამეტრის შემცველ განტოლებაში შემავალი პარამეტრის და ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელო-ბათა სიმრავლეების გათვალისწინებით დავადგენთ, რომ პირველ და მეორე განტოლებებს აკმაყოფილებს შესაბამისად ფესვები $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ და $x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

ბოლო განტოლების ამოხსნის ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მეთოდისაგან გაცილებით მარტივია პარამეტრის გამოყენებით განტოლების ამოხსნა. რაც მოსწავლეებს თვალსაჩინო წარმოდგენას აძლევს, რომ პარამეტრის გამოყენებით არასტანდარტული ამოცანის ამოხსნის მეთოდის შესწავლა მათ დაეხმარებათ არა მარტო ისეთი არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისას, რომელიც მხოლოდ პარამეტრული მეთოდით ამოიხსნება, არამედ ისეთი არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის დროსაც, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია სხვადასხვა მეთოდით.

რეზიუმე

არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის დროს გამოიყენება სხვადასხვა სახის განსხვავებული მეთოდები, რომელთა კლასიფიცირება სირთულეებთან არის დაკავშირებული და უმრავლეს შემთხვევაში შეუძლებელიც კია, რადგან ასეთი მეთოდები გამოიყენება ამოცანათა ძალიან ვიწრო წრისათვის. მეორეს მხრივ, სასწავლო პრაქტიკაში მასწავლებელსაც და მოსწავლეებსაც უამრავი სხვადასხვა სახის არასტანდარტული ამოცანის ამოხსნა უხდებათ, რაც აუცილებელს ხდის ასეთი მეთოდებისა და წესების ცოდნას, რათა წარმატებით განხორციელდეს არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა. სტატიაში განხილულია ასეთი მეთოდი, რომელიც პარამეტრის მეთოდის სახელითაა ცნობილი და მისი გამოყენება ამარტივებს ზოგიერთი სახის არასტანდარტული განტოლებების ამოხსნას. მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში: განტოლების ამოსახსნელად შემოგვაქვს პარამეტრი და ვიხილავთ ამოსახსნელი განტოლებისაგან გაცილებით უფრო ზოგადი სახის პარამეტრის შემცველ განტოლებას, რომლიდანაც ამოსახსნელი განტოლება მიიღება პარამეტრის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის. ამოვხსნით პარამეტრის შემცველ განტოლებას და შემდეგ ვუბრუნდებით მოცემული განტოლების ამოხსნას პარამეტრის იმ კონკრეტული მნიშვნელობისათვის, რომელზეც პარამეტრული განტოლება ემთხვევა

ამოსახსნელ განტოლებას. ასეთი მიდგომის განხორციელებისას აუცილებელი ხდება განტოლების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენა, რადგან ამოსახსნელი განტოლებიდან პარამეტრის შემცველ განტოლებაზე გადასვლის დროს ზოგჯერ ფართოვდება ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე და შესაძლებელია გარეშე ფესვის გაჩენა. განხილულია სხვადასხვა სახის არასტანდარტული განტოლებების ამოხსნა პარამეტრული მეთოდის გამოყენებით და დასაბუთებულია მისი გამოყენების უპირატესობა არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სხვა მეთოდებთან შედარებით.

Bakur Bakuradze, Papuna Berdzulishvili

Using the parameter method while solving some types of non-standard equations

Summary

The parameter method for solving non-standard tasks is discussed. Using this method simplifies solving some types of non-standard equations. The essence of the method is follow: to solve the equation, we use a parameter and see an equation containing a much more general type of parameter than the solvable equation, from which the solvable equation is received for the specific value of the parameter. We solve the equation containing the parameter and then return to solve the given equation for the specific value of the parameter on which the parametric equation matches the solvable equation. By using such an approach, it becomes necessary to determine the set of allowable values of the equation, because the transition from the solvable equation to the equation containing the parameter sometimes expands the set of allowable values of the variable, and it is possible to have an extraneous root. The solution of different types of non-standard equations using the parametric method is discussed and the advantages of its use over other methods of solving non-standard problems are substantiated.