0541 მათემატიკა MATHEMATICS

# დიფერენციალური განტოლებების გამოყენება ბუნებრივი პროცესების შესასწავლად

**მაკა ლომთაძე**
ქუთაისის უნივერსიტეტი;
ბიზნესისა და ტექნოლოგიების უნივერსიტეტი
Kutaisi University; Business and Technology University
**E-mail:** maka.lomtadze@btu.edu.ge

**რეფერატი**

განხილული სტატიიდან კარგად ჩანს, რომ დიფერენციალური განტოლებები გამოიყენება მრავალი ცხოვრებისეული პრობლემის მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად. ამიტომ მათი ამოხსნების სხვადასხვა მეთოდების შესწავლა საშუალებას მოგვცემს გამოვიკვლიოთ და გავაანალიზოთ აღნიშნული ტიპის მოდელები. სწორედ ამ მიზანს ემსახურება ეს ნაშრომი.

აქ ბუნებრივი პროცესების აღსაწერად გამოყენებულია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება და ამოხსნილია საწყისი პირობის გათვალისწინებით. კერძოდ, განხილულია ისეთი ექსპონენციალური ცვლილება, რომლის დროსაც დროის მოცემულ t მომენტისთვის y სიდიდე იზრდება ან კლებულობს მისი ზომის პროპორციულად. ასეთი სახის დამოკიდებულებების მაგალითებად მოყვანილია პოპულაციისა და რადიაქტიური დაშლის ამსახავი პროცესები. ამ სიდიდეებზე ამბობენ, რომ ისინი ექსპონენციურ ცვლილებებს ექვემდებარებიან.

**საკვანძო სიტყვები:** ექსპონენციური ცვლილება, ფუნქცია, დიფერენციალური განტოლება, ფუნქციის წარმოებული, კერძო ამონახსნი, ზოგადი ამონახსნი.

საკმაოდ საინტერესოა მაჩვენებლიანი ფუნქციები, ისინი სწრაფად იზრდებიან ან მცირდებიან დამოუკიდებელი ცვლადის ცვლილებასთან ერთად და აღწერენ ზრდადობის ან კლებადობის პროცესს, რომელიც დამახასიათებელია მთელი რიგი ბუნებრივი მოვლენებისთვის. განვიხილოთ ისეთი ექსპონენციალური ცვლილება, რომლის დროსაც დროის მოცემულ t მომენტისთვის y სიდიდე იზრდება ან კლებულობს მისი ზომის პროპორციულად. ასეთი სახის დამოკიდებულებების მაგალითებად შეგვიძლია მოვიყვანოთ პოპულაციის, რადიაქტიური დაშლის, ობიექტების და მის მახლობლობაში არსებული საშუალო ტემპერატურის ცვლილების ამსახავი პროცესები. ასეთი სახის სიდიდეებზე ამბობენ, რომ ისინი ექსპონენციურ ცვლილებებს ექვემდებარებიან. თუ განსახილველი y სიდიდის მნიშვნელობა დროის t მომენტში არის $y_0$, შეგვიძლია y სიდიდის, როგორც t-ს ფუნქციის პოვნა შემდეგი საწყის მნიშვნელობიანი ამოცანის ამოხსნით:

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{1}$$

რომლის საწყისი პირობაა: $y = y_0$ როცა t = 0.

თუ y დადებითი და ზრდადია, მაშინ k-ც დადებითია და (1) განტოლებიდან შეგვიძლია ვთქვათ რომ ზრდის ტემპი აკუმულირებულის პროპორციულია. თუ y დადებითი და კლებადია, მაშინ k უარყოფითია და (1) განტოლებიდან შეგვიძლია ვთქვათ რომ კლების ტემპი დარჩენილის პროპორციულია.

საწყის მნიშვნელობიანი (1) ამოცანის ამონახსნია $y = y_0 e^{kt}$ (2)

სიდიდე, რომელიც ასე იცვლება ამბობენ, რომ მას აქვს ექსპონენციური ზრდა, თუ $k > 0$ და ექსპონენციური კლება, თუ $k < 0$. k-ს ცვლილების ტემპის მუდმივს უწოდებენ. ფუნქციები, რომლებიც გაწარმოებისას არ იცვლებიან მხოლოდ მაჩვენებლიანი ფუნქციისა და მუდმივების ნამრავლებია. სტატიაში აღწერილია ექსპონენციური ცვლილების მიღების პროცესი.

**პოპულაციის უსაზღვრო ზრდა.** ინდივიდების რაოდენობა პოპულაციის დროს დროზე დამოკიდებული დისკრეტული ფუნქციაა, რადგან ის იღებს დისკრეტულ მნიშვნელობებს. მაგრამ, როცა ინდივიდების რაოდენობა საკმაოდ დიდი ხდება შესაძლოა მისი დაახლოება უწყვეტ ფუნქციასთან. თუ დავუშვებთ, რომ ნაყოფიერება მუდმივი სიდიდეა და გამრავლების მქონე ინდივიდების წილი მუდმივი რჩება, მაშინ დროის ნებისმიერ t მომენტში შობადობა პროპორციულია არსებული ინდივიდების $y(t)$ რაოდენობის. აგრეთვე დაუშვათ, რომ პოპულაციის სიკვდილიანობა სტაბილურია და პროპორციულია $y(t)$ რაოდენობის. თუ პოპულაციიდან გასვლას და გარედან შემომატებას უგულებელვყოფთ ზრდის ტემპი $\frac{dy}{dt}$ იქნება შობადობისა და სიკვდილიანობის სხვაობა, რაც ჩვენ შემთხვევაში ორი პროპორციულობის სხვაობაა.

$$\frac{dy}{dt} = ky \ , \qquad \text{სადაც} \quad y = y_0 e^{kt}$$

და $y_0$ არის დროის t=0 მომენტში პოპულაციის ზომა. აქ შესაძლებელია იყოს გარემოს ზემოქმედების შედეგად გამოწვეული რაღაც შეზღუდვები, თუმცა მათ არ განვიხილავთ. პოპულაციის უსაზღვრო ზრდა $\frac{dy}{dt} = ky$ პროპორციით მოდელირდება.

განვიხილოთ მაგალითი ამ მოდელის გამოყენებით.

**მაგალითი 1: (დაავადების შემთხვევა).** დავუშვათ ამჟამად გვაქვს დაავადების 10 000 შემთხვევა, რამდენი წლის განმავლობაშია შესაძლებელი ამ რიცხვის დაყვანა 1000-მდე, თუ დაავადებულთა რაოდენობა ყოველწლიურად მცირდება 25%-ით?

ა. რა დრო დასჭირდება შემთხვევათა რაოდენობის შემცირებას 1000-მდე?

ბ. რა დრო დასჭირდება დაავადების აღმოფხვრას, ანუ შემთხვევათა რაოდენობის 1-ზე ნაკლებ სიდიდეზე დაყვანას?

**ამოხსნა:** თუ ათვლას დავიწყებთ t=0 მომენტიდან, მაშინ $y_0$ იქნება $y_0 = 10000$ -ის ტოლი. გამოვიყენოთ $y = y_0 e^{kt}$ განტოლება და გავითვალისწინოთ $y_0$ მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$y = 10000e^{kt} \qquad (2)$$

გამოვთვალოთ k-ს მნიშვნელობა. ერთი წლის შემდეგ, ანუ როცა $t = 1$ დაავადებულთა რაოდენობა იქნება საწყისი რაოდენობის 100-25=75% პროცენტი, ანუ 7500. თუ ჩავსვამთ (2) ტოლობაში,მივიღებთ:

$$7500 = 10000e^{k \cdot 1}$$
$$e^k = 0,75$$
$$k = \ln 0,75 < 0$$

დროის ნებისმიერ t მომენტისთვის $y = 10000e^{(\ln 0,75)t}$ (3)

გამოვთვალოთ t დროის მნიშვნელობა $y = 1000$ -თვის.

(3) განტოლებაში შევიტანოთ $y = 1000$ მნიშვნელობა და t მიმართ ამოვხსნათ განტოლება.

$$1000 = 10000e^{\ln 0,75t}$$
$$e^{(\ln 0,75)t} = 0,1$$
$$(\ln 0,75)t = \ln 0,1$$
$$t = \frac{\ln 0,1}{\ln 0,75} \approx 8,0039 \quad \text{წელი.}$$

მაშასადამე, მოცემული პირობით, დაავადებათა შესამცირებლად 1000-მდე, საჭიროა 8 წელზე ცოტა მეტი.

**რადიოაქტივობა.** ზოგიერთი ატომი არასტაბილურია და შეუძლია სპონტანურად გამოასხივოს მასა ან რადიაცია. ამ პროცესს რადიაქტიურ დაშლას უწოდებენ და ელემენტს, რომლის ატომიც ამ პროცესს

ექვემდებარება რადიაქტიურს უწოდებენ. ზოგჯერ გამოსხივების შედეგად დარჩენილი ნაწილი იცვლის ფორმას და წარმოიქმნება ახალი ელემენტი.

დროის ნებისმიერ მოცემულ მომენტში რადიაქტიური ელემენტის დაშლის სიჩქარე პროპორციულია არსებული რადიოაქტიური ბირთვების რაოდენობის და რადიოაქტიური ელემენტის დაშლა აღიწერება $\frac{dy}{dt}=-ky$ განტოლებით, სადაც $k>0$.

თუ დროის ნულოვანი მომენტისთვის არსებული რადიოაქტიური ბირთვების რაოდენობა არის $y_0$, მაშინ დროის ნებისმიერ მომდევნო $t$ მომენტისთვის არსებული ბირთვების რაოდენობა იქნება:

$$y=y_0e^{-kt} \tag{4}$$

სადაც $k>0$.

რადიოაქტიური ელემენტის ნახევარდაშლის პერიოდი არის დრო, რომელიც საჭიროა შერჩევაში არსებული რადიოაქტიური ბირთვების დაშლის შედეგად მათი რაოდენობის გასანახევრებლად. უნდა აღინიშნოს რომ ნახევარდაშლის პერიოდი მუდმივია და დამოკიდებულია მხოლოდ რადიაქტიურ ნივთიერებაზე და არაა დამოკიდებული შერჩევაში თავიდან არსებული რადიოაქტიური ბირთვების რაოდენობაზე.

ნახევარდაშლის პერიოდი (T) გამოითვლება ფორმულით:

$$T=\frac{\ln 2}{k} \tag{5}$$

**მაგალითი 2: პლუტონიუმ-239.** პლუტონიუმის იზოტოპის ნახევარდაშლის პერიოდია 24 360 წელი. თუ ბირთვული ავარიის შედეგად ატმოსფეროში აღმოჩნდა 10 გ. პლუტონიუმი, რამდენი წელი დასჭირდება იზოტოპის 80%-ის დაშლას?

**ამოხსნა:** პლუტონიუმის იზოტოპის დაშლის დროის დასადგენად გამოვიყენოთ (4) ფორმულა: $y=y_0e^{-kt}$. საჭიროა ორი სიდიდის, ჯერ k -ს და შემდეგ t-ს მნიშვნელობების დადგენა, როცა y გახდება $y=0,2y_0$ -ის ტოლი.

$$y_0e^{-kt}=0,2y_0 \text{ ანუ}$$
$$e^{-kt}=0,2$$

k -ს მნიშვნელობის დასადგენად გამოვიყენოთ (5) ფორმულა:

$$T=\frac{\ln 2}{k} \quad \text{საიდანაც}$$
$$k=\frac{\ln 2}{T}=\frac{\ln 2}{24360}\approx 2,8\cdot 10^{-5}$$

ეხლა გამოვთვალოთ t-ს მნიშვნელობა

$$e^{-kt}=0,2$$
$$e^{-\frac{\ln 2}{24360}t}=0,2$$
$$-\frac{\ln 2}{24360}t=\ln 0,2\,, \quad \text{საიდანაც}$$
$$t=\frac{-24360\cdot\ln 0,2}{\ln 2}\approx 56562 \quad \text{წელი.}$$

მაშასადამე, პლუტონიუმის იზოტოპის 80%-ის დაშლას დასჭირდება დაახლოებით 56562 წელი. რადიოაქტიური ელემენტების დაშლის დროის დადგენა შეიძლება გამოყენებული იქნას დედამიწის წარსულიდან მოვლენების დასათარიღებლად.

ლიტერატურა

1. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., Thomas' Calculus, Early transcental, Thirteenth Edition, Pearson, New York, 2014, ISBN 978-0-321-88407-7;
2. Chiang A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", The McGrow-Hill Company, International edition 2005, 688 pp.
3. М.Дьяченко, Р.Ульянов, «Мера и интеграл», Москва.»,2002.
4. Виноградова Т.А., Олехник С.Н. Садовничий В.А. . Задачи и упражнение по.ч математическому анализу.2.М.,2004.
5. Краснов М.Л.,Киселев А.И.,Макаренко Г.И. . С борник задач по обыкновенным Дыференсиальным уравнениям. М. 1978.

**Maka Lomtadze**

**The use of differential equations is natural in studying various processes**

**Abstract**

From the discussed article, it is clear that differential equations are used to create mathematical models of many real-life problems. Therefore, studying different methods of their solution will allow us to examine and analyze the mentioned types of models. This paper serves this purpose.

Here, the first-order differential equation is used to describe natural processes and is solved considering the initial condition. In particular, such exponential changes are considered, during which for a given time T, the quantity Y increases or decreases proportionally to its size. Population and radioactive decay processes are given as examples of such dependencies. These quantities are said to undergo exponential changes.

**Keywords:** Exponential change, Function, The differential equation, Function derivative, private solution, General solution.