ს ა ე რ თ ა შ ო რ ი ს ო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ი ნ ტ ე ლ ე ქ ტ ი"
I N T E R N A T I O N A L PERIODICAL SCIENTIFIC JOURNAL "I N T E L L E C T I"
№ 1 (75), 2024

0541 მათემატიკა MATHEMATICS

მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა მიმდევრობით დიფერენცირების მეთოდით

მაკა ლომთაძე
ქუთაისის უნივერსიტეტი;
ბიზნესისა და ტექნოლოგიების უნივერსიტეტი
Kutaisi University; Business and Technology University
E-mail: maka.lomtadze@btu.edu.ge

რეფერატი

მათემატიკის სწავლებისას იცვლება მათემატიკური განათლების მიმართ მოთხოვნები. ეს ცვლილებები დაკავშირებულია მეცნიერებისა და ტექნიკის მეტად სწრაფი ტემპით განვითარებასთან, ცვლილებები, რომლებიც ხდება და კვლავ მოხდება უახლოეს პერიოდში უმაღლეს სასწავლებლებში მათემატიკური განათლების სფეროში, იმ მოთხოვნილების საფუძველზე. რომელიც ესაჭიროება უმაღლესი სასწავლებლის კურსდამთავრებულს, იწვევს მათემატიკური კურსის გამოყენებითი მიმართულების გაძლიერებას და ფუნდამენტალური მათემატიკური მომზადების დონის ამაღლებას

სტატიაში განხილულია მიმდევრობით დიფერენცირების მეთოდი, რომელიც უთუოდ საინტერესოა სტუდენტთა შემოქმედებითი შესაძლებლობების განსავითარებლად. კერძოდ განხილულია მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამონახსნი ელემენტარული ფუნქცია არ არის და რომლის ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მწკრივის სახით, რომელიც ახალ ტრანსცენდენტულ ფუნქციას გვაძლევს.

აქ განხილული მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია ნებისმიერი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად. მას გამოვიყენებთ მხოლოდ მაშინ, როცა წინასწარ არის ცნობილი, რომ განტოლების ამონახსნი მწკრივის სახით არსებობს. ეს მეთოდი ძირითადად გამოიყენება საინჟინრო პრაქტიკაში, იმ კვლევით შრომებში, სადაც დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი შეიძლება ექსპერიმენტალურად იყოს შემოწმებული.

საკვანძო სიტყვები: ხარისხოვანი მწკრივი, ტრასცენდენტული ფუნქცია, დიფერენციალური განტოლება, ფუნქციის წარმოებული, კერძო ამონახსნი, ზოგადი ამონახსნი.

პრაქტიკაში გამოყენების თვალსაზრისით განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას. თუ გვაქვს ისეთი დიფერენციალური განტოლება რომლის ამონახსნი ელემენტარული ფუნქცია არ არის შეგვიძლია ამონახსნი წარმოვადგინოთ მწკრივის სახით, რომელიც ახალ ტრანსცენდენტულ ფუნქციას გვაძლევს. ავიღოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი, თუ p_0, p_1, p_2 კოეფიციენტები $x - x_0$ სხვაობის მიმართ წარმოადგენენ მრავალწევრებს ან შეიძლება მათი დაშლა $(x - x_0)$-ის მიმართ ხარისხოვან მწკრივებად, სადაც $p_0(x) \neq 0$, მაშინ ამ განტოლების ამონახსნიც გამოისახება ხარისხოვანი მწკრივით. თავიდან განვიხილოთ შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლება:

$$y'' = F(x, y, y') \tag{1}$$

ვიპოვოთ (1) განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$x = x_0,\ f(x_0) = A_0,\ f'(x_0) = A_1. \tag{2}$$

დავუშვათ, ამ განტოლების ამონახსნია $y = f(x)$ რომლის დაშლა შეიძლება მისი x_0 წერტილის მიდამოში ტეილორის მწკრივად

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (3)$$

ვიპოვოთ ამ დაშლის კოეფიციენტები: $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0)\ldots$ ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ (2) საწყისი პირობები. საიდანაც გვექნება $f(x_0)=A_0, f'(x_0)=A_1$, ხოლო (1) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$y_0''=f''(x_0)=F(x_0,\ y_0,\ y_0')$$

მესამე რიგის წარმოებულების მოსაძებნად გავაწარმოოთ (1) განტოლების ორივე ნაწილი და მივიღებთ

$$y'''=F_x'(x,y,y')+F_y'(x,y,y')y'+F_{y_1}'(x,y,y')y''$$

მიღებულ გამოსახულებაში ჩავსვათ

$$x=x_0, f(x_0)=A_0, f'(x_0)=A_1, f''(x_0)=F(x_0,A_0,A_1)$$

საიდანაც მივიღებთ $f'''(x_0)$ მნიშვნელობას, თუ ამ პროცესს კიდევ განვაგრძობთ, ვიპოვით

$$f'''(x_0)=\frac{dF(x_0,A_0,A_1)}{dx}\ldots f^n(x_0)=\frac{d^{n-2}F(x_0,A_0,A_1)}{dx^{n-2}}\ldots$$

აქ $\frac{dF}{dx},\ldots\frac{d^{n-2}F}{dx^{n-2}}$ სიმბოლოები აღნიშნავს $F(x,y,y')$ ფუნქციის სრულ წარმოებულს, ე.ი.

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot F(x,y,y')$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (3)-ში, საიდანაც მივიღებთ:

$$y=A_0+A_1(x-x_0)+\frac{1}{2!}F(x_0,A_0,A_1)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{d^{n-2}F(x_0,A_0,A_1)}{dx^{n-2}}(x-x_0)^n+\ldots$$

აქ განხილული მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია ნებისმიერი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად.

უნდა აღინიშნოს, რომ მიმდევრობით დიფერენცირების მეთოდი ზოგადად არ იძლევა საშუალებას გამოვიკვლიოთ მიღებული მწკრივი ამოხსნისაკენ კრებადობაზე, რადგან ხშირ შემთხვევაში ვერ ვახერხებთ საძიებელი მწკრივის ზოგადი წევრისთვის ანალიტიკური გამოსახულების პოვნას. ამ მეთოდს გამოვიყენებთ მხოლოდ მაშინ, როცა წინასწარ არის ცნობილი, რომ განტოლების ამონახსნი მწკრივის სახით არსებობს. ეს მეთოდი ძირითადად გამოიყენება საინჟინრო პრაქტიკაში, იმ კვლევით შრომებში, სადაც დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი შეიძლება ექსპერიმენტალურად იყოს შემოწმებული.

აქვე შევნიშნოთ, რომ განხილული ხერხის გამოყენება მოსახერხებელია დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის პოვნისას, სადაც A_0 და A_1-ს განვიხილავთ როგორც ნებისმიერ მუდმივებს.

მაგალითი 1: ვიპოვოთ $y''+yx^2=0$ განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს $x_0=0,\ y_0=1,\ y_0'=0.$

ამოხსნა. რადგანა საწყის პირობაში $x_0=0$, ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f'(0)+\ldots \quad (4)$$

ჯერ ვიპოვოთ $f(0), f'(0), f''(0)\ldots$ სიდიდეები, საწყისი პირობებიდან გვაქვს:

$$f(0)=1, f'(0)=0$$

მოცემული განტოლებიდან მივიღებთ:

$$y'' = -y_0 \; x_0^2 = 0$$

მოცემული განტოლების ორივე ნაწილს თუ ვაწარმოებთ K-ჯერ, მივიღებთ:

$y^{(K=2)} = -y^{(K)}x^2 - 2Ky_x^{(K-1)} - K\left(K-1\right)y^{(K-2)}$ და თუ გავითვალისწინებთ საწყის პირობას: x=0, მივიღებთ

$$y_0^{(K+2)} = -K\left(K-1\right)y_0^{(K-2)}$$

და მივიღეთ რეკურენტული ფორმულა $y_0^{(K)}$ წარმოებულების გამოსათვლელად, როცა $K \geq 2$, გვექნება:

$$y''' = 0,\; y_0^{(IV)} = -2,\; y_0^{(5)} = y_0^{(6)} = y_0^{(7)} = 0$$

$$y_0^{(8)} = \left(-1\right)^2\left(1\cdot 2\right)\left(5\cdot 6\right)\; y_0^{(9)} = y_0^{(10)} = y_0^{(11)} = 0$$

$$y_0^{(12)} = \left(-1\right)^3\cdot\left(1\cdot 2\right)\left(5\cdot 6\right)\left(9\cdot 10\right)$$

$$-----------------$$

$$y^{(4n)} = \left(-1\right)^n\left(1\cdot 2\right)\cdot\left(5\cdot 6\right)\cdot\left(9\cdot 10\right)\cdot\ldots\cdot\left[\left(4k-3\right)\left(4k-2\right)\right].$$

აქ მიღებული გამოსახულებიდან ჩანს, რომ ნულისაგან მხოლოდ ის წარმოებული განსხვავდება, რომლის რიგი 4-ის ჯერადა. აქ მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ (4) ტოლობაში და მივიღებთ მწკრივს

$$\begin{aligned} y = f\left(x\right) = 1 - \frac{x^4}{4!}\left(1\cdot 2\right) + \frac{x^8}{8!}\left(1\cdot 2\right)\left(5\cdot 6\right) + \ldots + \\ +\left(-1\right)^k\cdot\frac{x^{4k}}{(4k)!}\left(1\cdot 2\right)\left(5\cdot 6\right)\ldots\left[\left(4k-3\right)\left(4k-2\right)\right] + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანის გამოყენებით, ვნახავთ, რომ მიღებული მწკრივი კრებადია $\left(-\infty,+\infty\right)$ შუალედში. მაშასადამე, (5) მწკრივი წარმოადგენს მოცემული მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების საძიებელ ამონახსნს.

განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდი გამოიყენება, როცა გვთხოვენ (1) განტოლების კერძო ამონახსნის $y = f\left(x\right)$ პოვნას, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს $f\left(x_0\right) = A_0$, $f'\left(x_0\right) = A_1$ ანდა ვიყენებთ, მაშინ როცა გვინდა ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი წარმოდგენილი ხარისხოვანი მწკრივის სახით, ($x-x_0$) ხარისხებით.

თუ (1) განტოლება კოშის II რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამონახსენის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირობებს აკმაყოფილებს (x_0, A_0, A_1) წერტილის მიდამოში, მაშინ მისი კერძო (ან ზოგადი) ამონახსენი შეიძლება მოვძებნოთ შემდეგი მწკრივის სახით:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(x - x_0\right)^n \tag{5}$$

რომლის კოეფიციენტები განსაზღვრას ექვემდებარება.

თუ (x_0, A_0, A_1) წერტილი (1) განტოლებისთვის არის განსაკუთრებული, მაშინ მისი კერძო (ანდა ზოგადი) ამონახსენი უნდა ვეძებოთ განზოგადებული ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$y_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(x - x_0\right)^{n+\rho} \tag{6}$$

სადაც არაა აუცილებელი ρ მთელი რიცხვი იყოს, ის ექვემდებარება განსაზღვრას მწკრივის კოეფიციენტებთან ერთად.

იმისათვის, რომ განსაზღვრონ (5) და (6) მწკრივების C_n, $n = 0,1,2,\ldots$ კოეფიციენტები, შემდეგნაირად იქცევიან:

1. ორჯერ აწარმოებენ (5) (ან (6)) უცნობი კოეფიციენტებით და პოულობენ y' და y'' ს.

2. საწყის დიფერენციალურ განტოლებაში სვამენ y' და y''-ის ხარისხოვან მწკრივებად გაშლას.

3. წარმოადგენენ ფუნქციას $F(x, y, y')$ ხარისხოვანი მწკრივის სახით $(x-x_0)$ ხარისხებად, რის შემდეგაც (1) ტოლობა ღებულობს ორი ხარისხოვანი მწკრივის ტოლობის სახეს.

4. მიღებული მწკრივების $x-x_0$ სხვაობის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტების განტოლების გზით ვღებულობთ უცნობი C_n კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის განტოლებებს. თუ ამონახსნები იძებნება (6) სახით, მაშინ $(x-x_0)$ სხვაობის უმცროსი ხარისხის კოეფიციენტების განტოლებით ვღებულობთ ე.წ. განმსაზღვრელ განტოლებას, საიდანაც ვპოულობთ ρ პარამეტრის ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს.

5. მიღებული განტოლებებიდან ვპოულობთ C_n კოეფიციენტებს და ვსამთ მათ საძიებელ (5) მწკრივში, თუ ამონახსენს ვეძებთ (6) სახით, მაშინ C_n კოეფიციენტებს ვპოულობთ ρ-ს ყოველი მნიშვნელობისთვის და ამგვარად ვღებულობთ იმდენ კერძო ამონახსენს, რამდენი მნიშვნელობაც აქვს ρ პარამეტრს.

მწკრივის სახით მიღებული ამონახსენი კრებადობის ცნობილი ნიშნებით შეიძლება გამოკვლეულ იქნას კრებადობაზე.

მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის აღწერილი მეთოდი შეიძლება განზოგადდეს ნებისმიერი რიგის განტოლებისთვის. ყველაზე ხშირად კი ამ ხერხს იყენებენ წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისას, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

1) თუ წრფივი დიფერენციალური განტოლების

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x) \tag{7}$$

ფუნქციონალური კოეფიციენტები $a_K(x)$, $K = 0,1,2,\ldots n$ და მისი მარჯვენა ნაწილი $\varphi(x)$, რომელიც განშლადია $|x-x_0| < R_1$ ინტერვალში $x-x_0$ ხარისხებით, ხარისხოვან მწკრივად, ხოლო $a_n(x) \neq 0$ $|x-x_0| < R_2$ ინტერვალში, მაშინ $|x-x_0| < r_1$, სადაც $r = \min(R_1, R_2)$ ინტერვალში და არსებობს მოცემული განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y = f(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

სადაც $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ (5)-ე კრებადი ხარისხოვანი მწკრივის სახის ნებისმიერი რიცხვებია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $a_n(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრებია და $a_n(x) \neq 0$ ყოველი x-სათვის, მაშინ ზემოთ მოყვანილი ამონახსენი იქნება (5) სახის მწკრივი, რომელიც კრებადია მთელს რიცხვით ღერძზე.

2) თუ II რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება წარმოდგება სახით:

$$(x-x_0)^2 y'' + y'(x-x_0)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + y\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = 0$$

სადაც

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ და } \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

$|x-x_0| < R$ ინტერვალში კრებადი ხარისხოვანი მწკრივებია, რომლებშიც a_0, b_0 და b_1 კოეფიციენტები ერთდროულად 0-ის ტოლი არ არის, მაშინ არსებობს მოცემული დიფერენციალური განტოლების, უკიდურეს შემთხვევაში, ერთი კერძო ამონახსენი $y = f(x)$, $|x-x_0| < R$ ინტერვალში კრებადი განზოგადებული (6) ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

ლიტერატურა

1. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., Thomas' Calculus, Early transcental, Thirteenth Edition, Pearson, New York, 2014, ISBN 978-0-321-88407-7;
2. Chiang A., “Fundamental Methods of Mathematical Economics”, The McGrow-Hill Company, International edition 2005, 688 pp.
3. ონიანი გ. მათემატიკური ანალიზის საფუძვლები ტ.2. ქუთაისი2008.
4. Бугров Я.С. Никольский С.М. Дыференсиальные уравнения.Кратные интегралы. Ряди. Функции комрлексного переменного. М.1981
5. Краснов М.Л.,Киселев А.И.,Макаренко Г.И. . С борник задач по обыкновенным Дыференсиальным уравнениям. М. 1978.
6. Виноградова Т.А., Олехник С.Н. Садовничий В.А. . Задачи и упражнение по.ч математическому анализу.2.М.,2004

Maka Lomtadze

Solving a high-order linear differential equation by the sequential differentiation method

Abstract

When teaching mathematics, the requirements for mathematics education are changing due to the rapid development of science and technology. These changes, which are occurring and will continue to happen in the near future in the field of mathematics education in higher education, are based on the needs required for a graduate of a higher education institution. This leads to the strengthening of the applied direction of the mathematical course and the elevation of the level of fundamental mathematical training. The article discusses the method of differentiation by sequence, which is undoubtedly interesting for developing students' creative abilities. In particular, it considers the second-order differential equation whose solution is not an elementary function and can be presented in the form of a series, thus yielding a new transcendental function. Using the method discussed here, it is possible to solve any order differential equation. However, it is advisable to use it only when it is known in advance that the solution of the equation exists in the form of a series. This method is mainly utilized in engineering practice and in research works where the solution of the differential equation can be tested experimentally.

Keywords: Quality row, Transcendental function, The differential equation, Function derivative, private solution, General solution.