0541 მათემატიკა MATHEMATICS

# განსაზღვრული ინტეგრალის დახმარებით რიცხვითი მწკრივის ჯამის გამოთვლა

**მაკა ლომთაძე**

**ქუთაისის უნივერსიტეტი,**

**ბიზნესის ტექნოლოგიური უნივერსიტეტი.**

**E-mail: maka.lomtadze@btu.edu.ge**

**E-mail: maka.lomtadze@unik.edu.ge**

**რეფერატი**

მწკრივთა თეორია ფართოდ გამოიყენება ინტეგრალების, დიფერენციალური განტოლებების და ფუნქციების ამოსახსნელად. ზოგ შემთხვევაში რიცხვითი მწკრივის ჯამის გამოთვლა შესაძლებელია და ზოგჯერ უმჯობესიც მოხდეს არასტანდარტული ხერხებით, როცა ასეთი მიდგომით საკმაოდ ნაკლები დრო დასჭირდება მათ ამოხსნას. სტატიის მიზანიც სწორედ ეს არის, ზოგიერთი კერძო სახის მწკრივის ჯამის გამოსათვლელად დავადგინოთ ინტეგრალური ტოლობები, რომელთა გამოყენებით შემდგომში მარტივად შევძლოდ გამოვთვალოთ გარკვეული სახის რიცხვით მწკრივთა ჯამი. სტატიაში ინტეგრალური ტოლობების დადგენის შემდეგ ამოხსნილია რამოდენიმე მაგალითი მიღებული ტოლობების გამოყენებით.

აქ შემოთავაზებული ხერხები ამყარებს შიგა დისციპლინარულ კავშირს მწკრივთა თეორიასა და ინტეგრალურ აღრიცხვას შორის.

ასეთი სახის რიცხვითი მწკრივების გამოთვლის ცოდნა ესაჭიროება თეორიული ფიზიკისა და ტექნიკური სპეციალობების სტუდენტებს. ამიტომ სასურველია ასეთი საკითხების შესწავლა მათთვის და შესაძლებლობების განსავითარებლად ამ სახის მაგალითების მიწოდება ამოსახსნელად.

**საკვანძო სიტყვები:** რიცხვითი მწკრივი, რიცხვითი მწკრივის ჯამი, ინტეგრალური აღრიცხვა, განსაზღვრული ინტეგრალი.

მწკრივთა თეორია წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთ ძირითად ნაწილს. ის მოიცავს რიცხვით და ფუნქციონალურ მწკრივებს. სტატიაში განხილულია გამოთვლები ზოგიერთი სახის რიცხვითი მწკრივებისა არასტანდარტული ხერხებით. აქ წარმოდგენილი არასტანდარტული ხერხები შეიძლება გამოვიყენოთ მწკრივების ჯამის გამოსათვლელად იმ დროს, როცა ტრადიციული მიდგომით ამოხსნას ვერ ვახერხებთ ან ბევრად მარტივია ამ ხერხით ამოხსნა.

სტატიაში გამოყენებული ამოცანების ამოხსნის ხერხები ამყარებს შიგა დისციპლინარულ კავშირს მწკრივთა თეორიასა და ინტეგრალურ აღრიცხვას შორის. რიცხვთა მწკრივის ჯამის საშუალებით მივდივართ ინტეგრალის ცნებამდე, ვთვლით მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს. ძირითადად მწკრივების გამოყენებით ხდება ინტეგრალის გამოთვლა. აქ კი განხილულია შებრუნებული ამოცანა, კერძოდ, მწკრივთა ჯამის გამოსათვლელად ვიყენებთ განსაზღვრულ ინტეგრალს.

განვიხილოთ შემდეგი სახის მწკრივები:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^k}{(k+l)(kn+m)}$$

და გამოვიყვანოთ მათი მწკრივთა ჯამის გამოსათვლელი ტოლობა.

ჯერ განვიხილოთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+l)(kn+m)}$$

სახის მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია:

$$a_k=\frac{1}{(k+l)(kn+m)}$$

მოვახდინოთ ამ წევრის გარდაქმნა:

$$a_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1^k}{(k+l)(kn+m)}=\frac{1}{n}\frac{1}{(k+l)\left(k+\frac{m}{n}\right)}=\frac{1}{n}\frac{n}{m-nl}\frac{\left(k+\frac{m}{n}\right)-(k+l)}{(k+l)\left(k+\frac{m}{n}\right)}$$

თუ წილადს გავწვეტთ და მოვახდენთ გამარტივებას, ამასთანავე გავითვალისწინებთ, რომ

$$\frac{1}{k+\frac{m}{n}}=\int_0^1 x^{k+\frac{m}{n}-1}dx \qquad \frac{1}{k+l}=\int_0^1 x^{k+l-1}dx \qquad \sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$$

მივიღებთ შემდეგს:

$$a_n=\frac{1}{m-nl}\left[\int_0^1 x^{k+l-1}dx-\int_0^1 x^{k+\frac{m}{n}-1}dx\right]=\frac{1}{m-nl}\int_0^1 x^k\left(x^{l-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)dx$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+l)(kn+m)}=\frac{1}{m-nl}\int_0^1 x^k\left(x^{l-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{m-nl}\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right]\left(x^{l-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)dx=\frac{1}{m-nl}\int_0^1\frac{\left(x^{l-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)}{1-x}dx$$

მივიღეთ მოცემული სახის მწკრივთა ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+l)(kn+m)}=\frac{1}{m-nl}\int_0^1\frac{\left(x^{l-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)}{1-x}dx \qquad (1)$$

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა:

$$a_k=\frac{(-1)^k}{(k+l)(kn+m)}$$

აქ

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1+x}$$

და ანალოგიური ამოხსნით მივიღებთ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+l)(kn+m)}=\frac{1}{m-nl}\int_0^1\frac{\left(x^{l-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)}{1+x}dx \qquad (2)$$

(1) და (2) ფორმულების გამოყენებით მარტივად შეგვიძლია ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნა.

ამ ხერხის გამოყენებით განვიხილოთ და ამოვხსნათ **მაგალითი 1**. :

გამოვთვალოთ შემდეგი მწკრივის ჯამი:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{(k+4)(2k+4)}$$

სადაც: **l=m=4 და n=2.**

(1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{(k+4)(2k+4)}=\frac{12}{4-2}\int_0^1\frac{x^{4-1}-x^{\frac{4}{2}-1}}{1-x}dx=6\int_0^1\frac{x^3-x}{1-x}dx=6\int_0^1\frac{x(x-1)(x+1)}{1-x}dx=-6\int_0^1(x^2+x)dx=-6\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-5$$

ახლა განვიხილოთ კიდევ უფრო ზოგადი შემთხვევა, გამოვთვალოთ შემდეგი სახის მწკრივის ჯამი:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pm 1)^k}{(pk+l)(kn+m)}$$

ჯერ განვიხილოთ მწკრივი:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+l)(nk+m)}$$

მოვახდინოთ განსახილველი მწკრივის ზოგადი წევრის გარდაქმნა:

$$a_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(kp+l)(nk+m)}=\frac{1}{pn}\frac{1}{\left(k+\frac{l}{p}\right)\left(k+\frac{m}{n}\right)}=\frac{1}{pn}\frac{pn}{pm-nl}\frac{\left(k+\frac{m}{n}\right)-\left(k+\frac{l}{p}\right)}{\left(k+\frac{l}{p}\right)\left(k+\frac{m}{n}\right)}$$

წილადის გაწყვეტით:

$$\frac{1}{k+\frac{m}{n}}=\int_0^1 x^{k+\frac{m}{n}-1}dx \qquad \frac{1}{k+\frac{l}{p}}=\int_0^1 x^{k+\frac{l}{p}-1}dx$$

და $\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$

და ამ ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგს:

$$a_n=\frac{1}{pm-nl}\left[\int_0^1 x^{k+\frac{l}{p}-1}dx-\int_0^1 x^{k+\frac{m}{n}-1}dx\right]=\frac{1}{pm-nl}\int_0^1 x^k\left(x^{\frac{l}{p}-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)dx$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+l)(nk+m)}=\frac{1}{pm-nl}\int_0^1 x^k\left(x^{\frac{l}{p}-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{pm-nl}\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right]\left(x^{\frac{l}{p}-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)dx=\frac{1}{pm-nl}\int_0^1\frac{\left(x^{\frac{l}{p}-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)}{1-x}dx$$

მივიღეთ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით მოცემული სახის მწკრივთა ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+l)(nk+m)}=\frac{1}{pm-nl}\int_0^1\frac{\left(x^{\frac{l}{p}-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)}{1-x}dx \tag{3}$$

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა:

$$a_k=\frac{(-1)^k}{(pk+l)(nk+m)}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1+x}$$

და ანალოგიურად ამოვხსნით, მივიღებთ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(pk+l)(nk+m)}=\frac{1}{pm-nl}\int_0^1\frac{\left(x^{\frac{l}{p}-1}-x^{\frac{m}{n}-1}\right)}{1+x}dx \tag{4}$$

(3) და (4) ტოლობების გამოყენებით მარტივად შეგვიძლია ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნა.

განვიხილოთ **მაგალითი 2:**
გამოთვალეთ მოცემული მწკრივის ჯამი:

$$\sum_{k-0}^{\infty}\frac{8}{(4k+1)(4k+3)}$$

მოცემული მაგალითის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ (3) ფორმულა. ამ შემთხვევაში: p=4, l=1, m=3 და n=4. ვისარგებლოთ (3) ტოლობით:

$$\sum_{k-0}^{\infty}\frac{8}{(4k+1)(4k+3)}=\frac{8}{4\cdot 3-4\cdot 1}\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{4}-1}-x^{\frac{3}{4}-1}}{1-x}dx=\int_0^1\frac{x^{-\frac{3}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}}{1-x}dx=$$

$$=\int_0^1\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}{1-x}dx=\int_0^1\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}(1-x)}dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(1+\sqrt{x}\right)}$$

აღვნიშნოთ: $\sqrt[4]{x}=t$ , მაშინ $x=t^4$ და $dx=4t^3dt$.

ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int_0^1\frac{4t^3dt}{t^3\left(1+t^2\right)}=4\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=4\operatorname{arctan}gt\Big|_0^1=4\left(\operatorname{arctan}g1-\operatorname{arctan}go\right)=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$$

**მაგალითი 3:**

გამოთვალეთ მოცემული მწკრივის ჯამი :

$$\sum_{k-0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3k+12)(2k+4)}$$

ამ მაგალითის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ (4) ფორმულას. მოცემული მაგალითისთვის **p=3, l=2, m=4** და **n=2**. ვისარგებლოთ (4) ტოლობით:

$$\sum_{k-0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3k+12)(2k+4)}=\frac{1}{3\cdot 4-2\cdot 12}\int_0^1\frac{x^{\frac{12}{3}-1}-x^{\frac{4}{2}-1}}{1+x}dx=-\frac{1}{12}\int_0^1\frac{x^3-x}{1+x}dx=$$

$$=-\frac{1}{12}\int_0^1\frac{x(x-1)(x+1)}{1+x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2-x\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{12}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{72}$$

ამ სახის მწკრივების გამოთვლა ესაჭიროება სხვადასხვა ტექნიკური სპეციალობის და თეორიული ფიზიკის სტუდენტებს.

**ლიტერატურა**

1. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., Thomas' Calculus, Early transcental, Thirteenth Edition, Pearson, New York, 2014, ISBN 978-0-321-88407-7.
2. Chiang A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", The McGrow-Hill Company, International edition 2005, 688 pp.
3. ონიანი გ. მათემატიკური ანალიზის საფუძვლები ტ.2. ქუთაისი, 2008.
4. Бугров Я.С. Никольский С.М. Дыференсиальные уравнения. Кратные интегралы. Ряди. Функции комрлексного переменного. М. 1981.
5. Виноградова Т.А., Олехник С.Н. Садовничий В.А. Задачи и упражнение по.ч математическому анализу. 2.М., 2004.
6. М.Дьяченко, Р.Ульянов, «Мера и интеграл», Москва, 2002.
7. Виноградова Т.А., Олехник С.Н. Садовничий В.А. Задачи и упражнение по.ч математическому анализу. 2.М, 2004.

## Calculating the sum of a number series using a definite integral

**Maka Lomtadze**

**Abstract**

The theory of series is widely used for solving integrals, differential equations, and functions. In some cases, the sum of a numerical series can be calculated, and sometimes it is better to use non-standard methods, as these approaches can significantly reduce the time needed to solve them. The goal of this article is to establish integral equations to calculate the sum of certain types of series, which can then be easily computed using these equations. After deriving the integral equations, several examples are solved using the obtained equations.

The methods presented here strengthen the internal disciplinary connection between the theory of series and integral calculus.

Knowledge of how to calculate such numerical series is essential for students of theoretical physics and technical disciplines. Therefore, it is desirable to study such topics for them and provide examples to develop their problem-solving abilities.

**Keywords:** Numerical series, Sum of numerical series, Integral calculus, Definite integral.