

0541 მათემატიკა MATHEMATICS

რიცხვითი მწკრივის კრებადობის სწავლების მეთოდთა

მაკა ლომთაძე

ევროპის ცენტრალური უნივერსიტეტი

E-mail: maka.lomtadze@btu.edu.ge

E-mail: maka.lomtadze@unik.edu.ge

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია რიცხვითი მწკრივის კრებადობა-განშლადობის სწავლების მეთოდთა. გარჩეულია კრებადობის აუცილებლობის და საკმარისობის ნიშნები. აღსანიშნავია, რომ მათემატიკური კურსის გადმოცემა მხოლოდ განსაზღვრების, ლემისა და თეორემების ლოგიკურად აწყობილი ჯაჭვით, მაგალითების განხილვის გარეშე არაა მართებული. მათემატიკის შესწავლისას უნდა შევისწავლოთ საბოლოო შედეგის ინტუიციურად განჭვრეტის უნარი და უნდა შეგვეძლოს ევრისტიკული განსჯა და მათემატიკური ინტუიციის განვითარება. ამიტომ მნიშვნელოვანია მათემატიკური ინტუიციის განვითარება მიღებული მათემატიკური ცოდნის საფუძველზე. ნაშრომში განხილულია ერთ-ერთი რიცხვითი მწკრივი, დადგენილია ამ რიცხვითი მწკრივის კრებადობა-განშლადობის პოვნის რამდენიმე შემთხვევა. განხილულია კრებადობის ნიშნები და გარჩეულია რამდენიმე მაგალითი.

საკვანძო სიტყვები: რიცხვითი მწკრივი, რიცხვითი მწკრივის ჯამი, კრებადი, განშლადი, კერძო ჯამი.

შესავალი

მეთოდისათვის აზრით, მათემატიკის სწავლება უნდა იყოს შესაძლებლობის მიხედვით მარტივი, გასაგები, ჩვეულებრივი და ზომიერ სიმკაცრეზე დამყარებული. გადმოცემის სიმარტივე ნიშნავს კურსის აგების სიმარტივეს, რომლის დროსაც აქცენტი გადატანილია ძირითადად, ძირითად პრინციპულ იდეებზე, დროის დიდი ნაწილი ეთმობა ძირითად მეთოდებს და ფაქტებს. პედაგოგმა უნდა გაითვალისწინოს, რომ ყველაზე მთავარია, სტუდენტმა გაიგოს იმ კვლევების იდეა და მეთოდები, რომელიც გამოიყენება შესასწავლი ამოცანის ამოხსნისას.

ძირითადი ნაწილი

თითქმის ყველა მათემატიკოსმა კარგად იცის, რომ მათემატიკური კურსის გადმოცემა მხოლოდ განსაზღვრების, ლემისა და თეორემების ლოგიკურად აწყობილი ჯაჭვით, მაგალითების განხილვის გარეშე არაა მართებული. მათემატიკის შესწავლისას უნდა შევისწავლოთ საბოლოო შედეგის ინტუიციურად განჭვრეტის უნარი და უნდა შეგვეძლოს ევრისტიკული განსჯა და მათემატიკური ინტუიციის განვითარება. ამიტომ მნიშვნელოვანია მათემატიკური ინტუიციის განვითარება მიღებული მათემატიკური ცოდნის საფუძველზე. ნაყოფიერი და სწორი ინტუიცია გამომუშავდება არა ცარიელ ადგილას, არამედ მტკიცე ცოდნის საფუძველზე, მათემატიკაში ცოდნა დაფუძნებულია მსჯელობაზე. არსებობს ისეთი შემთხვევებიც, როდესაც არ არის საჭირო მსჯელობები და მაშინვე გამოიყენება „მკაცრი“ მათემატიკური მეთოდები, ასეთ სიტუაციას მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც განხილული ამოცანისათვის არსებობს განსაზღვრული მკაფიოდ დამუშავებული ალგორითმი და ცნობილია, რომ ზუსტად ეს ალგორითმი უნდა გამოვიყენოთ მოცემულ შემთხვევაში. ეს არანაირად ეწინააღმდეგება ლოგიკური დამტკიცებების აუცილებლობას. ლოგიკური დამტკიცება ეხმარება სტუდენტს საჭირო მათემატიკური ჩვევების გამომუშავებაში, ასევე ეხმარება დაეუფლოს მათემატიკურ მეთოდებს, გამოიყენოს მათთვის საჭირო მათემატიკური კულტურა, რომლის შემადგენელ ნაწილს შეადგენს ლოგიკური აზროვნება.

დამტკიცების მეორე დადებითი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ მისი საშუალებით შესაძლებლობა გვაქვს ავხსნათ შემოტანილი მათემატიკური ცნებების აზრი, დავუფლოთ მათ და გამოვიყენოთ ისინი პრაქტიკაში. ჯერ კიდევ არისტოტელე აფასებდა დამტკიცებას, არა მხოლოდ იმიტომ, რომ ისინი ამყარებენ წესრიგს ამა თუ იმ მდგომარეობაში, არამედ იმისათვის რომ ისინი ხსნიან ლოგიკურ კავშირებს მათ შორის.

დიდი ყურადღება უნდა დაეთმოს ცნებების ახსნას, ილუსტრაციული მაგალითების მოყვანას, შემსწავლელი მეთოდების კერძო მაგალითებისათვის გამოყენებას და ყოველგვარ „ლირიულ გადახვევებს“.

განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა $(U_n)_{n \geq 1}$ და შევაერთებთ + ნიშნით, მივიღებთ სიმბოლურ გამოსახულებას:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (1)$$

რომელსაც რიცხვითი მწკრივი ეწოდება.

(1) მწკრივის ჯამის განმარტებას ასეთი გზით მივუდგეთ: განვიხილოთ (1) მწკრივის რამდენიმე წევრის ჯამი და წევრთა რიცხვის ზრდისას შევისწავლოთ ასე მიღებული ჯამების ყოფაქცევა. თუ ეს ჯამები შესაკრებთა უსაზღვროდ ზრდისას გარკვეული რიცხვისკენ მიისწრაფვის, მაშინ ამ რიცხვს (1) მწკრივის ჯამი ეწოდება, ხოლო, როცა აღნიშნული ტიპის ჯამების ზღვარი არ აღმოაჩნდება, მაშინ ამბობენ, რომ (1) მწკრივი განშლადია.

განვიხილოთ (1) მწკრივის პირველი n წევრის ჯამი:

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k$$

მას ვუწოდოთ (1) მწკრივის კერძო ჯამი. თუ n -ს მივცემთ ყველა ნატურალურ მნიშვნელობას, მივიღებთ კერძო ჯამების

$$(S_n)_{n \geq 1}$$

მიმდევრობას, რომელიც შეესაბამება (1) მწკრივს. შემოვიღოთ:

განმარტება 1. ვიტყვი, რომ (1) მწკრივი კრებადია და S არის მისი ჯამი, თუ კრებადია კერძო ჯამების $(S_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობა და $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. ამ შემთხვევაში ვწერთ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = S.$$

იმ შემთხვევაში, როცა

$$(S_n)_{n \geq 1}$$

მიმდევრობა განშლადია (1) მწკრივს განშლადი ეწოდება და მისი ჯამი არ განმარტება. განშლადი მწკრივის შემთხვევაში მისი პირველი n წევრის ჯამი S_n მიისწრაფვის უსასრულობისკენ ან S_n არ მიისწრაფვის არავითარი გარკვეული ზღვრისკენ. პირველ შემთხვევაში მწკრივს ეწოდება საკუთრივ განშლადი, ხოლო მეორე შემთხვევაში – რხეადი.

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m+n}$$

მწკრივს, რომელიც მიიღება (1) მწკრივიდან m წევრის ჩამოცილებით ეწოდება (1) მწკრივის m რიგის ნაშთი. თუ კრებადი მწკრივის ნაშთის ჯამს აღვნიშნავთ R_m -ით, მაშინ: $S_m + R_m = S$.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

1. თუ მწკრივში რამდენიმე წევრს ახალი წევრით შევცვლით ან თუ მას ჩამოვაშორებთ (დაუმატებთ) რამოდენიმე წევრს, ამით მწკრივის კრებადობა ან განშლადობა არ დაირღვევა.
2. თუ (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი m რიგის ნაშთის ზღვარი, სადაც $m \rightarrow \infty$ ნულის ტოლია, ანუ $R_m = 0$.
3. თუ (1) მწკრივი კრებადია S რიცხვისაკენ, მაშინ ნებისმიერი λ რიცხვისთვის (λu_n) მწკრივი კრებადია λS რიცხვისაკენ.
4. განშლადი მწკრივის გამრავლებით $\lambda \neq 0$ რიცხვზე, კვლავ განშლადი მწკრივი მიიღება.

რიცხვით მწკრივის თეორიის ერთ-ერთი უმთავრესი ამოცანაა, მათი ჯამების გამოთვლის მეთოდების შემუშავება. მწკრივის ჯამის ზუსტი გამოთვლა, თუ ის შესაძლებელია, თითქმის ყოველთვის დაკავშირებულია უზარმაზარ გამოთვლებთან. ამიტომ უფრო ხშირად შემოიფარგლებიან

მწკრივის ჯამის მიახლოებითი გამოთვლით. ვთვლით, რომ $S \approx S_m$ ამ დროს მიღებული ცდომილებაა

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_{m+n}$$

მწკრივის ჯამი.

მწკრივის ჯამის გამოთვლის დაწყებამდე უნდა გამოვარკვიოთ მოცემული მწკრივი კრებადია თუ განშლადი, ვინაიდან განშლად მწკრივის ჯამი არა აქვს. ამ დროს განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს მწკრივის კრებადობის გამოკვლევის ამოცანები.

მაგალითი 1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს მწკრივი:

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \dots$$

დავწეროთ მწკრივის ზოგადი წევრის ფორმულა მარტივი ფორმით.

აქ ნათლად ჩანს, რომ მოცემული მწკრივის წევრების მრიცხველები არის ნატურალური რიცხვის კვადრატები, მნიშვნელები კი ნატურალური რიცხვთა მიმდევრობა დაწყებული 2-დან, ამიტომ მწკრივის ზოგადი წევრის ფორმულას ექნება სახე:

$$u_n = \frac{n^2}{n+1}.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ მაგალითში ითხოვდნენ მწკრივის ზოგადი წევრის ფორმულის დაწერას თანაც უმარტივესს. ეს არაა შემთხვევით, რადგან მწკრივის ზოგადი წევრის ფორმულის დაწერა მისი რამოდენიმე საწყისი წევრით შეუძლებელია.

მაგალითად თუ გვაქვს მოცემული მწკრივის პირველი სამი წევრი $1+2+4+\dots$ აქ არ არის რთული შესამჩვევ, რომ ეს არის 2-ის ნული, ერთი და ორი ხარისხები. ამიტომ მწკრივის ზოგადი წევრის

უმარტივესი ფორმულა იქნება $u_n = 2^{n-1}$. თუმცა შეიძლება შევადგინოთ, კიდევ რამდენიმე სხვადასხვა ფორმულა, რომლების $n=1,2,3$ -ის დროს იძლევიან შესაბამისად მოცემული მწკრივის პირველ წევრებს (1, 2 და 4-ს). როგორც მაგალითად:

$$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}; \quad b_n = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{5-n}, & n \neq 5 \\ 1, & n = 5 \end{cases} \quad c_n = \frac{8}{n^2 - 7n + 14}$$

აქ მწკრივები, რომლის ზოგადი წევრის ფორმულებია a_n და b_n განშლადია (მათთვის არ სრულდება კრებადობის აუცილებელი პირობა) C_n კი კრებადია (ამაში შეიძლება დარწმუნდეთ შედარების II ნიშნის დახმარებით თუ შევადარებთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ მწკრივს).

მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობაა (u_n) მწკრივის ზოგადი u_n წევრის ზღვარი, მისწრაფოდეს ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, მაშინ მწკრივი განშლადია. თუ კი $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, მაშინ ვერ ვიტყვით, რომ მწკრივი კრებადია საჭიროა მწკრივის გამოკვლევა. ამის საილუსტრაციოდ სტუდენტებს შეგვიძლია მოვუყვანოთ ისეთი მწკრივის მაგალითი რომელიც აკმაყოფილებს ამ პირობას,

მაგრამ მწკრივი განშლადია ეს არის ე.წ. ჰარმონიული მწკრივი: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, აქ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, მაგრამ მწკრივი განშლადია ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ $S_n \rightarrow \infty$, როცა $n \rightarrow \infty$.

მაგალითი 2: ვაჩვენოთ, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$ მწკრივი აკმაყოფილებს კრებადობის აუცილებელ პირობას, მაგრამ არის განშლადი.

ჩავწეროთ მწკრივი გაშლილი სახით: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

კრებადობის აუცილებელი პირობა სრულდება ვინაიდან $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

მოცემული მწკრივის განშლადობის დამტკიცებისთვის შევაფასოთ მისი n -ური კერძო ჯამი:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

ასე, რომ $S_n \geq \sqrt{n}$; ცხადია, რომ როდესაც $n \rightarrow \infty$ $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ და მაშასადამე $S \rightarrow \infty$, მწკრივი განშლადია.

განვიხილოთ **კოშის კრიტერიუმი**: (1) მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი ნატურალური n_0 რიცხვი, რომ როდესაც $n \geq n_0$ და ნებისმიერი ნატურალური p -სათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k \right| = |U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_{n+p}| < \varepsilon$$

შევთანხმდეთ, რომ ჯამს $\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k$ ვუწოდოთ (1) მწკრივის „ p სიგრძის მონაკვეთი“.

მაშინ კოშის კრიტერიუმი გვიჩვენებს, რომ (1) მწკრივი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა „ამ მწკრივის ნებისმიერი სიგრძის მონაკვეთი მოდულით რაგინდ მცირე ხდება, თუ მის სათავეს საკმარისად შორს ავიღეთ“.

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი:

მაგალითი 3: კოშის კრიტერიუმის დახმარებით ვაჩვენოთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 2^n}$ მწკრივის კრებადობა.

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ როცა $n > N$ სრულდება შემდგომი უტოლობა: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ (2)

$$\begin{aligned} \text{ნებისმიერი ნატურალური } p \text{ რიცხვისათვის} \quad & |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| = \\ & = \left| \frac{n+1}{2^{n+1}(n+2)} + \frac{n+2}{2^{n+2}(n+3)} + \dots + \frac{n+p}{2^{n+p}(n+p+1)} \right| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}(1 - \frac{1}{2^p})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} (1 - \frac{1}{2^p}) < \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\text{მაშასადამე, ნებისმიერი } p\text{-სათვის} \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \frac{1}{2^n}$$

$$\text{და გვაქვს უტოლობა } \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \quad \text{საიდანაც } 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{და} \quad n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

დავუშვათ:

$$N = \begin{cases} \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, & \varepsilon < \frac{1}{2} \\ 1, & \varepsilon \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{ვასკვნით, რომ, როცა მართებულია უტოლობა } n > N, \text{ მაშინ } \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

ამრიგად, მართებულია (2) უტოლობა ნებისმიერი p -სათვის. საიდანაც ვასკვნით: ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს N რიცხვი დამოკიდებული ε -ზე და დამოუკიდებელი p -საგან, რომ როცა $n > N$, სრულდება (2) უტოლობა. მაშასადამე, კოშის კრიტერიუმის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 4. კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით ვაჩვენოთ მწკრივის კრებადობა

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

მოცემული მაგალითის ამოსახსნელად ლექტორმა ასეთი კითხვები უნდა დასვას:

ლექტორი: რომელი წევრების ჯამის აბსოლუტური მნიშვნელობა უნდა განვიხილოთ?

სტუდენტი: მოცემულ შემთხვევაში

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2p-1} \quad (4)$$

ლექტორი: კოშის კრიტერიუმის თანახმად რა უნდა გამოვიკვლიოთ?

სტუდენტი: უნდა გამოვიკვლიოთ არსებობს თუ არა $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ნატურალური p რიცხვი, ისეთი რომ (4) არ იყოს ε -ზე ნაკლები.

ლექტორი: ამისათვის როგორ უნდა მოვიქცეთ?

სტუდენტი: დავუშვათ $\varepsilon = \frac{1}{4}$ და $p=2n$, მაშინ:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{6n-1} > \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} + \dots + \frac{1}{6n} = 2n \cdot \frac{1}{6n} = \frac{1}{3} > \varepsilon = \frac{1}{4}$$

ლექტორი: მიღებული უტოლობიდან რა დასკვნის გაკეთება შეგვიძლია?

სტუდენტი: მაშასადამე, კომის კრიტერიუმის თანახმად მოცემული მწკრივი განშლადია.

შევნიშნოთ რომ, კომის კრიტერიუმი, მიუხედავად მისი უნივერსალობისა, ხშირ შემთხვევაში ძნელად გამოსაყენებელი ხდება. ჩვეულებრივ ძნელი დასადგენია, შესრულებულია თუ არა ამ თეორემის პირობები. ამიტომ, სასარგებლოა ვიცოდეთ მწკრივის კრებადობის სხვა (ნაკლებად უნივერსალური, მაგრამ პრაქტიკული თვალსაზრისით მოხერხებული) ნიშნები. ასეთი ნიშნების ერთობლიობა მწკრივთა თეორიის ძირითად მასალას შეადგენს.

ლიტერატურა

1. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., Thomas' Calculus, Early transcendental, Thirteenth Edition, Pearson, New York, 2014, ISBN 978-0-321-88407-7;
2. Chiang A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", The McGraw-Hill Company, International edition 2005, 688 pp.
3. ჭელიძე ვ. ლომჯარია ნ. ხახუტია გ. უმაღლესი მათემატიკის კურსი. ნაწილი III, თბილისი, 1973.
4. ზალანჩივაძე რ., ასათიანი ვ. პედაგოგიკის ფილოსოფიური საფუძვლები, თბილისი, „თსუ“. 1997.
5. А.А.Столяр. Педагогика математики. Минск. «Высшая школа», 1986.
6. Л.А.Кудряцев. Современная математика и ее преподавание. М., «наука», 1985.
7. J.Garnett. Bounded Analytic Functions. Academic Press, New York, 1980.

Methodology of Teaching the Convergence of Numerical Series

Maka Lomtadze

Abstract

Series theory is widely used to solve integrals, differential equations, and functions. When teaching it, great attention should be paid to explaining concepts, providing illustrative examples, applying learning methods to specific examples, and avoiding any "lyrical digressions." The paper discusses the methodology of teaching the convergence and divergence of numerical series. The numerical series is discussed, and several cases for determining the convergence and divergence of the numerical series are presented. Additionally, the criteria for convergence are discussed, and several examples are provided.

Keywords: Numerical series, Sum of numerical series, convergent, divergent, partial sum.