0541 მათემატიკა MATHEMATICS

სხეულის მოცულობის გამოთვლა ორჯერადი ინტეგრალის გამოყენებით

მაკა ლომთაძე
ევროპის ცენტრალური უნივერსიტეტი
E-mail: maka.lomtadze@btu.edu.ge
E-mail: maka.lomtadze@unik.edu.ge

რეფერატი

მოცულობა სამგანზომილებიანი არაუარყოფითი ადიტიური ფუნქციაა, რომელიც არ იცვლის თავის მნიშვნელობას სხეულის მოძრაობის დროს. ეს არის გეომეტრიულ სხეულებთან დაკავშირებული ერთ-ერთი ძირითადი სიდიდე. უმარტივეს შემთხვევაში მოცულობა იზომება ერთეული სიგრძის წიბოების მქონე იმ კუბების რაოდენობით, რომელიც მოცემულ სხეულში ეტევა. ძველი აღმოსავლეთის (ბაბილონი, ეგვიპტე) მათემატიკოსები ფლობდნენ მოცულობის გამოთვლის ზოგიერთ წესს ისეთი სხეულებისთვის, რომლებიც ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში (კერძოდ, პრიზმული ძელები, სრული და წაკვეთილი პირამიდები, ცილინდრები და სხვა) ეს იყო სხეულის მოცულობის მიახლოებითი – ემპირიული გამოთვლის ხერხები. მოცულობის გამოთვლის თეორია მიახლოებითი წესებისაგან გაანთავისუფლეს ბერძენმა მათემატიკოსებმა; ევკლიდეს „საწყისებში“ და არქიმედეს თხზულებებში არის მრავალწახნაგებისა და ზოგიერთი მრგვალი სხეულის (კერძოდ, ცილინდრის, კონუსის, სფეროს და მათი ნაწილების) მოცულობის გამოსათვლელი ზუსტი ფორმულები. მოცულობის გამოთვლის თანამედროვე თეორიის საფუძველია ზღვართა თეორია და ინტეგრალური აღრიცხვა. ანალიზურად მოცულობა შეიძლება გამოისახოს ორჯერადი ინტეგრალის საშუალებით. ვთქვათ, K სხეული შემოსაზღვრულია OZ ღერძის პარალელური მსახველების მქონე ცილინდრული ზედაპირით, OXY სიბრტყის M კვადრირებადი არითა და f(x,y) ზედაპირით, რომელსაც ცილინდრის მსახველის ნებისმიერი პარალელი კვეთს ერთსა და მხოლოდ ერთ წერტილში. ასეთი სხეულის მოცულობა შეიძლება გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალის გამოყენებით:

$$V = \iint_M f(x,y)\,dxdy$$

საკვანძო სიტყვები: ინტეგრალური აღრიცხვა, განსაზღვრული ინტეგრალი, ცილინდრული ზედაპირი, ორჯერადი ინტეგრალი, სხეულის მოცულობა.

შესავალი

დიფერენციალური აღრიცხვის ცნებები და მეთოდები, აგრეთვე ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი იდეები ფართოდ ვრცელდება მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვის. უპირველეს ყოვლისა ეს ეხება მთავარ იდეას, ინტეგრალს, როგორც გარკვეული სახის ჯამის ზღვარს. მრავალი გეომეტრიული და ფიზიკური ამოცანის ამოხსნა მოითხოვს ორჯერადი ინტეგრალის გამოყენებას.

ამ სტატიაში განხილულია საკითხი, რომელიც დაკავშირებულია ორი ცვლადის ფუნქციათა ინტეგრებასთან, კერძოდ გამოთვლილია გარკვეული ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობები ორჯერადი ინტეგრალის გამოყენებით.

ძირითადი ნაწილი

ცნობილია, რომ ცილინდრული ზედაპირით შემოსაზღვრული იმ სხეულის მოცულობა, რომლის ფუძეები ერთმანეთის პარალელურია ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

ცილინდრული სხეული ვუწოდეთ სხეულს, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი ზედაპირებით: ქვემოდან OXY სიბრტყით, ზემოდან $z = f(x,y)$ ზედაპირით და გვერდებიდან ცილინდრული ზედაპირით, რომლის მსახველი OZ ღერძის პარალელურია.

ვთქვათ D მოცემული ცილინდრული სხეულის ფუძეა, რომელსაც აქვს სასრული ფართობი, ეს არე დავყოთ ქვეარეებად $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$. ყოველი $\Delta\sigma_k\,(k = 1,2,3,...n)$ არის კონტურზე ავაგოთ ცილინდრული ზედაპირი, რომლის მსახველი OZ ღერძის პარალელურია, მაშინ მოცემული ცილინდრული სხეული დაიყოფა ელემენტარულ ცილინდრულ სხეულებად, რომელთა რიცხვია n, ავიღოთ $\Delta\sigma_k$ არეზე ნებისმიერი $P_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი. ცხადია, $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ წერტილი, სადაც

$\zeta_k = f(\xi_k, \eta_k)$ მევს მოცემულ $z = f(x,y)$ ზედაპირზე. $M_k(k=1,2,...,n)$ წერტილზე გავავლებთ OXY სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს, მივიღებთ ცილინდრულ სხეულებს, რომელთა მოცულობებია:

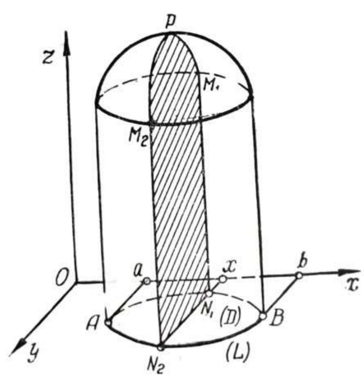
$$f(P_k)\Delta\sigma_k(k=1,2,3,...n)$$

ავიღოთ ასეთი ცილინდრული სხეულების მოცულობათა ჯამი $\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta x_k$.

თუ განვიხილავთ ზღვარს $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k$ სადაც λ უდიდესია $\Delta\sigma_k$ არეების დიამეტრებს შორის მივიღებთ ცილინდრული სხეულის V მოცულობის გამოსათვლელ ფორმულას. ეს ზღვარი მეორე მხრივ წარმოადგენს $z = f(x,y)$ ფუნქციის ორჯერად ინტეგრალს, რომელიც გავრცელებულია D არეზე.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k \quad \text{და} \quad V = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

მაშასადამე, ორჯერადი ინტეგრალი გეომეტრიულად წარმოადგენს ცილინდრული სხეულის მოცულობას.



ვთქვათ, D არეზე მოცემულია არაუარყოფითი უწყვეტი $z = f(x,y)$ ფუნქცია, ვიგულისხმოთ, რომ D არის L კონტურს Ox და Oy ღერძების პარალელური წრფეები და ორზე მეტ წერტილში არ კვეთს. ორი კიდურა A და B წერტილები L კონტურს ყოფს AN_1B და AN_2B წირებად, რომლებიც Oy ღერძის პარალელური წრფით იკვეთება მხოლოდ ერთ წერტილში. თუ ჩავთვლით, რომ ამ წირების განტოლებებია $y = y_1(x); \quad y = y_2(x)$, რომლებიც უწყვეტი ფუნქციებია $[a,b]$ სეგმენტზე, სადაც

ს ა ე რ თ ა შ ო რ ი ს ო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ი ნ ტ ე ლ ე ქ ტ ი“
№ 1 (78), 2025
I N T E R N A T I O N A L PERIODICAL SCIENTIFIC JOURNAL “I N T E L L E C T I”

a და b, A და B წერტილების აბსცისებია. ასეთი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება

$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

ფორმულით:

ამიტომ, ცილინდრული სხეულის V მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

მაშასადამე , $$V=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

თუ x და y ცვლადებს როლებს შევუცვლით მივიღებთ:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

სადაც $x=x_1(y);\quad x=x_2(y)$ შესაბამისად AN_1B და AN_2B წირების განტოლებებია.

მაგალითი 1: გამოვთვალოთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=x^2+2y$, $y=x^2$ და $y^2=x$ ზედაპირებით.

ამოხსნა: ავაგოთ $y=x^2$ და $y^2=x$ პარაბოლები, რომლებიც D არეს შემოსაზღვრავენ, მოვძებნოთ ამ არის განაპირა წერტილების აბსცისები. წერტილების საპოვნელად ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა $\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=x \end{cases}$.

ამ სისტემის ამონახსნები ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არის $x=0$ და $x=1$, რომლებიც წარმოადგენენ განაპირა წერტილების აბსცისებს. ამიტომ, მოცულობის გამოთვლის წესის თანახმად:

$$V=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+2y\right)dy=\int_0^1\left(x^2y+y^2\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx$$

$$V=\int_0^1\left(x^2\sqrt{x}+x-2x^4\right)dx=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{27}{70}$$

მაშასადამე, მოცემული ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა არის:

$$V=\frac{27}{70}.$$

მაგალითი 2: გამოვთვალოთ $z=x^2+y^2$, $y=\frac{1}{9}x^2$, $y=1$ და $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა: $z = x^2 + y^2$ ზედაპირი წარმოადგენს ბრუნვით პარაბოლოიდს, რომელიც $z = y^2$ პარაბოლის OZ ღერძის გარშემო ბრუნვით მიიღება, ხოლო $y = \frac{1}{9}x^2$ ზედაპირი პარაბოლური ცილინდრია, რომლის მსახველები OZ ღერძის პარალელურია და მისი მიმმართველი წირია $y = \frac{1}{9}x^2$ პარაბოლა XOY სიბრტყეზე. y=1 განტოლება გამოსახავს XOZ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს, ხოლო Z=0 წარმოადგენს XOY სიბრტყის განტოლებას. მიღებული სხეულის მოცულობა შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$V = 2\iint_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = 2\int_0^1 dy \int_0^{3\sqrt{y}} \left(x^2 + y^2\right)dx$$

$$V = 2\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\Bigg|_0^{3\sqrt{y}} dy$$

$$V = 2\int_0^1 \left(9y\sqrt{y} + 3y^2\sqrt{y}\right)dy = 2\left(9\cdot\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + 3\cdot\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{312}{35}$$

მაშასადამე, მოცემული ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობაა

$$V = \frac{312}{35}.$$

ლიტერატურა

1. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., Thomas' Calculus, Early transcental, Thirteenth Edition, Pearson, New York, 2014, ISBN 978-0-321-88407-7;
2. Chiang A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", The McGrow-Hill Company, International edition 2005, 688 pp.
3. ჭელიძე ვ. ლომჯარია ნ. ხახუტია გ. უმაღლესი მათემატიკის კურსი. ნაწილი III, თბილისი 1973.
4. ბალანჩივაძე რ., ასათიანი ვ. პედაგოგიკის ფილოსოფიური საფუძვლები, თბილისი, „თსუ". 1997.
5. А.А.Столяр. Педагогика математики. Минск. «Высщая школа».1986.
6. Л А Кудряцев. Современная математика и ее преподаваниею .М., »наука»1985.
7. J.Garnett. Bounded Analitic Functions. Academic Press, New York, 1980.

Calculating the volume of a solid using a double integral

Maka lomtadze

Abstract

Concepts and methods of differential calculus, along with the fundamental principles of integral calculus, are extensively generalized to functions of multiple variables. Central to this generalization is the integral, understood as a particular type of limit of sums. The resolution of numerous geometric and physical problems necessitates the application of double integrals. This article addresses the topic of integration of functions of two variables, focusing specifically on the computation of volumes of solids bounded by certain surfaces through the use of double integrals.

Keywords: integral accounting, definite integral, cylindrical surface, double integral, volume of a solid.