0111 განათლების მეცნიერება EDUCATION SCIENCE

ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლების ერთი მეთოდური მიდგომის შესახებ საშუალო სკოლაში

ბაკურ ბაკურაძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
E-mail: bakur.bakuradze41@rambler.ru
გიორგი ბერძულიშვილი
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
E-mail: giorgi.berdzulishvili@mail.ru

რეფერატი

საშუალო სკოლაში ალბათობის თეორიის საკითხების სწავლება მრავალ სირთულესთან არის დაკავშირებული. ალბათობის თეორიის ის საკითხები, რომელთა შესწავლისას მოსწავლეებს ექმნებათ სირთულეები, ძირითადად მოიცავს სტოქასტურ ხაზს. ალბათობის ამოცანების ამოსახსნელად მოსწავლეებს სჭირდებათ ოდნავ განსხვავებული უნარები და მსჯელობის მეთოდები, ვიდრე სხვა სახის მათემატიკური ამოცანების ამოხსნისას. სკოლის მოსწავლეებისთვის სტოქასტური ხაზის სწავლების მეთოდოლოგია სრულყოფილად არ არის შემუშავებული. უმაღლეს სასწავლებლებში ალბათობის თეორიის სწავლებისას გამოყენებული მეთოდოლოგიური ტექნიკის გადატანა საშუალო სკოლაში ყოველთვის ეფექტური არ არის და ასეთ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე ალბათობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის შემთხვევაშიც. საჭიროა სკოლის მოსწავლეებისთვის სტოქასტური მიმართულების სწავლების მეთოდოლოგიის გაუმჯობესება. ამ საკითხების სწავლებას მასწავლებლებმა განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიაქციონ ალბათობის თეორიის საკითხების სწავლებისას, რაც წარმოადგენს ალბათობის ამოცანების ამოხსნის საფუძველს. სწავლების ჩვენი მიდგომა ეფუძნება საკვანძო ამოცანების გამოყოფას, მათი ამოხსნების სწავლებას და მათზე დაყრდნობით მათი მსგავსი ალბათობის ამოცანების ამოხსნას. წარმოდგენილი თეორიული მოსაზრებები განმტკიცებულია სათანადო პრაქტიკული ამოცანების განხილვით, რომელთაც ერთვის სათანადო მეთოდური დასკვნები.

საკვანძო სიტყვები: ხდომილობა, ალბათობა, ალბათობის თეორია, საკვანძო ამოცანა, მათემატიკური მოდელი.

შესავალი

საშუალო სკოლაში ალბათობის თეორიის სწავლება მნიშვნელოვანი საკითხია და ამავდროულად მრავალ სირთულესთან არის დაკავშირებული. ეს სირთულეები ძირითადად მოიცავს სტოქასტურ ხაზს, ვინაიდან ალბათობის ამოცანების ამოსახსნელად მოსწავლეებს სჭირდებათ მათემატიკური ამოცანების ამოხსნისგან სრულიად განსხვავებული უნარები და მსჯელობის მეთოდები. უმაღლეს სასწავლებლებში ალბათობის თეორიის სწავლებისას გამოყენებული მეთოდების კოპირება საშუალო სკოლაში ყოველთვის ეფექტური არ არის. ამ შემთხვევაში მთავარი აქცენტი კეთდება თეორემების გამოყენებაზე, რაც მოითხოვს მომზადების საკმაოდ მაღალ დონეს. შედეგად, საჭიროა სკოლის მოსწავლეებისთვის სტოქასტური მიმართულების სწავლების მეთოდოლოგიის გაუმჯობესება. ამ საკითხების სწავლებას მასწავლებლებმა განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიაქციონ ალბათობის თეორიის საკითხების სწავლებისას.

ძირითადი ნაწილი

ზოგადად, სტოქასტურ ხაზს საშუალო სკოლაში ყოფენ ორ ძირითად ნაწილად: ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. ჩვენ სტატიაში განვიხილავთ ალბათობის თეორიის შესწავლასთან დაკავშირებულ საკითხებს. რადგან ალბათობის თეორია სწავლობს შემთხვევითი მოვლენების კანონებს, მათ თვისებებს, მათზე მოქმედებებს და სხვა. ამიტომ, ერთ-ერთი მთავარი სირთულე, რომელიც წარმოიქმნება ამ ალბათობის თეორიის შესწავლისას, არის ალბათობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის სწავლებათან დაკავშირებული საკითხები. უპირველეს ყოვლისა, ეს ეხება ალბათობის ცნების განსაზღვრას, ასევე იმ შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის დადგენას, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ პირობებს.

სკოლის მოსწავლეების წარმატებული სწავლებისთვის, ალბათობის თეორიის მასალა წარმოდგენილი უნდა იყოს სტრუქტურირებული ფორმით. სასკოლო კურსში შესწავლილი თეორიული მასალა საშუალებას იძლევა, გამოვავლინოთ რიგი ძირითადი ქმედებები, რომლებიც გამოიყენება ამოცანების ამოხსნის დროს. მაშასადამე, ჩნდება კითხვა ისეთი ამოცანების პოვნის შესახებ, რომელთა ამოხსნა გააერთიანებდა ალბათობის თეორიის რამდენიმე მოქმედებას და წესს. იმისდა მიხედვით, თუ რა ქმედებები იყო მითითებული, შეიძლება გამოიკვეთოს რიგი ეგრეთ წოდებული ძირითადი ამოცანა ან ძირითადი ამოცანები, რომელთა ირგვლივაც შესაძლებელია მსგავსი ამოცანების დაჯგუფება.

ასეთი პრობლემების ძიებისას, უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა განისაზღვროს საშუალო სკოლის შესაბამისი კლასის მოსწავლეების მომზადების დონე ალბათობის თეორიაში ამოცანების ამოსახსნელად. ამ მიზნით აკაკი წერეთლის სახელობის ქუთაისის პირველ საჯარო სკოლაში მოსწავლეებს შევთავაზეთ სატესტო ნაშრომის შესრულება, რომელიც მოიცავდა 4 ამოცანას ალბათობის თეორიიდან.

მოვიყვანოთ ასეთი ამოცანის მაგალითი [2]:

1,5 სმ რადიუსის წრე მთლიანად ნებისმიერად მოთავსებულია მართკუთხედში, რომლის გვერდებია 5 სმ და 4 სმ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მართკუთხედში შემთხვევით ნასროლი წერტილი მოხვდება წრეში? ეს ამოცანა ეხება გეომეტრიული ალბათობის თემას. ალბათობის გეომეტრიული განმარტებით, სასურველი ალბათობა უდრის შესაბამისი ფიგურების ფართობების ფარდობას. ამ შემთხვევაში, აუცილებელია ვიპოვოთ 1,5 სმ რადიუსის მქონე წრის ფართობი (რომელშიც უნდა ჩავარდეს ნასროლი წერტილი — ხელსაყრელი შედეგი) და მართკუთხედის ფართობი, რომლის ზომებია 5 სმ და 4 სმ (რომელშიც მოთავსებულია წერტილი — ზოგადი შედეგი). შედეგად, ჩვენ მივიღებთ, რომ საძიებელი ალბათობაა:

$$P(A)=\frac{S_1}{S}.$$

მაშინ, ალბათობა იმისა, რომ მართკუთხედში შემთხვევით ნასროლი წერტილი მოხვდება წრეში, ტოლია:

$$P(A)=\frac{S_1}{S}=\frac{\pi R^2}{\mathrm{ab}}=\frac{2,25\pi}{5\cdot 4}=0,1125\,\pi\,.$$

ამ ამოცანის მოსწავლეებისთვის დავალებად მიცემის მთავარი მიზანი იყო ყველაზე ტიპიური შეცდომების იდენტიფიცირება, რომლებიც წარმოიქმნება ალბათობის თეორიის ამოცანების ამოხსნისას. მოსწავლეების წერილობითი ნაშრომების ანალიზმა აჩვენა, რომ ისინი უშვებდნენ შემდეგი ძირითადი ტიპის შეცდომებს:

1. დავალებები შესრულდა არასწორად თეორიის არცოდნის გამო;
2. დავალებები შინაარსობრივად სწორად იყო შესრულებული, მაგრამ გამოთვლებში იყო არითმეტიკული შეცდომები;
3. ამოცანები არ არის დასრულებული, მაგრამ ზოგიერთი ამოცანა შეიცავს ინდივიდუალურ სწორი ამოხსნის ნაბიჯებს.

გამოთვლითი შეცდომები ყველაზე მცირე პრობლემაა, რადგან ისინი კავშირში არ არის ალბათობის თეორიის ამოცანების ამოხნის ალგორითმის ცოდნასთან, მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ ერთიანი ეროვნული გამოცდებს აბიტურიენტები აბარებენ ნაწილობრივ ტესტის და ნაწილობრივ წერითი სახით, ამიტომ ასეთი შეცდომები შესაძლებელია სერიოზულ პრობლემად იქცეს. გამოთვლითი კულტურის დაბალი დონე, რაც გამოიხატება შესასრულებელი არითმეტიკული ოპერაციების სწორი თანმიმდევრობით შესრულების ცოდნაში, არ იძლევა საშუალებას სწორი პასუხი გასცეს ამოცანის კითხვას და მაღალი შედეგი მიიღოს აბიტურიენტმა მისაღებ გამოცდაზე.

ხშირ შემთხვევაში, ალბათობის თეორიის ამოცანების ამოხსნისას მოსწავლეების უმთავრესი სირთულე ის არის, რომ ისინი ბოლომდე ვერ ერკვევიან და ვერ აღიქვამენ დასმული ამოცანის მათემატიკურ მოდელს. სტოქასტური პრობლემები ხასიათდება მათი მრავალფეროვნებით, რაც ართულებს კონკრეტულ სიტუაციებში ამოცანის ამოხსნის მათემატიკური მოდელის არჩევანს, რაც უქმნიან სირთულეებს არა მარტო მოსწავლეებს, არამედ მასწავლებლებსაც.

ასეთ პირობებში, მნიშვნელოვანია, ამოცანების ძირითადი კლასებისთვის შემუშავდეს მათი ამოხსნის მათემატიკური მოდელები, რისთვისაც შესაძლებელია გამოიყოს ალბათობის თეორიის

სასკოლო კურსის საკვანძო ამოცანების სისტემები და მათი ამოხსნისთვის ყველაზე მნიშვნელოვანი და გამოყენებადი ალგორითმები. შემდგომში მასწავლებელსაც და მოსწავლეებსაც დაჭირდებათ შემუშავებული მოდელების გარკვეული გარდაქმნები, რათა ისინი გამოიყენონ ამოხსნილი ამოცანების მსგავსი ამოცანების ამოსახსნელად.

საკვანძო ამოცანაში ჩვენ ვგულისხმობთ ისეთ ამოცანას, რომლის ამოსახსნელად საჭიროა ისეთი საბაზისო ალგორითმების და გამოთვლების გამოყენება, რომელთა საშუალებით შესაძლებელია მსგავსი ამოცანების ამოხსნა. მაგალითად, განვიხილოთ ამოცანა [1].

ამოცანა 1. ვარჯიშზე კალათბურთელი ბურთს ისვრის კალათში ერთი და იმავე პოზიციიდან. ცნობილია, რომ კალათში ბურთის ჩაგდების ალბათობაა $p=0{,}6$. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ კალათბურთელი 10 ნასროლი ბურთიდან კალათში ჩააგდებს 6-ჯერ? 10-ჯერ?

ამ ამოცანის ამოხსნისას შესაძლებელია შემდეგი ეტაპების იდენტიფიცირება (ცხრილი 1).

ძირითადი ამოცანების ამოხსნა ცხრილი 1.

ამოცანის ამოხსნის ეტაპები	გამოთვლები
ერთი დამოუკიდებელი განმეორებითი მოვლენის $p=0{,}6$ ალბათობის არჩევა (ჩვენ შემთხვევაში კალათბურთელის მიერ კალათში ბურთის ჩაგდების ალბათობა) და მისი საპირისპირო მოვლენის ალბათობის გამოთვლა (ჩვენ შემთხვევაში კალათბურთელის მიერ კალათისთვის ბურთის აცილების ალბათობა).	კალათბურთელის მიერ კალათში ბურთის ჩაგდების ალბათობა ცნობილია, ვიპოვოთ კალათისთვის ბურთის აცილების ალბათობა ($q=\overline{p}=1-0{,}6=0{,}4$).
მოცემული მოვლენის დადგომის ყველაზე სავარაუდო რაოდენობის ალბათობის გამოთვლა ბერნულის ფორმულის გამოყენებით: $p=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$, სადაც n არის განმეორებითი ცდების რაოდენობა, ხოლო m კალათში ჩავარდნილი ბურთების რაოდენობა	გამოვთვალოთ n და m -ის საშუალებით შესაბამისი C_n^m .
საჭირო შედეგის დადგომის ალბათობის გამოთვლა ბერნულის ფორმულის გამოყენებით	შესაბამისი ალბათობების გამოთვლა

საილუსტრაციოდ მოვიყვანთ დასმული ამოცანის ამოხსნა:

კალათბურთელის მიერ თითოეული სროლის შედეგი დამოკიდებული არ არის არც წინა ნასროლის და არც მომავალი სროლის შედეგზე. მაგალითად, თუ პირველ შემთხვევაში კალათბურთელის მიერ კალათში 10-ჯერ ნასროლი ბურთის შედეგებია:

$$AA\,\overline{A}\,A\,\overline{A}\,\overline{A}\,AA\,\overline{A}\,A\ ,$$

მაშინ ალბათობათა გამრავლების კანონის თანახმად, ასეთი შედეგის დადგომის ალბათობა იქნება:

$$p\cdot p\cdot q\cdot p\cdot q\cdot q\cdot p\cdot p\cdot q\cdot p=p^6\cdot q^4 .$$

სულ 6-ჯერ ბურთის ჩავარდნის და 4-ჯერ აცილების გადანაცვლებათა რიცხვი გამეორებებით ტოლია:

$$\overline{P}_n=\frac{10!}{6!\cdot 4!}.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$C_{10}^{6}=\frac{10!}{6!\cdot 4!}\ .$$

ალბათობათა შეკრების თეორემის თანახმად, საძიებელი ალბათობა ტოლია:

$$p=C_{10}^{6}\cdot p^{6}\cdot q^{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(0,6)^{6}\cdot(0,4)^{4}=\frac{250822656}{10^{10}}\approx 0,2508 .$$

მეორე შემთხვევის რეალიზება შესაძლებელია ერთადერთი შემთხვევით: $AAAAAAAAAA$. ალბათობათა გამრავლების კანონის თანახმად ასეთი შედეგის დადგომის ალბათობა იქნება:

$$p\cdot p\cdot p\cdot p\cdot p\cdot p\cdot p\cdot p\cdot p\cdot p=p^{10}.$$

ეს შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$p=C_{10}^{10}\cdot p^{10}\cdot q^{0}=1\cdot(0,6)^{10}\cdot 1=(0,6)^{10}.$$

ამ ამოცანის განხილული მოდელი არ არის მარტივი. თუმცა, ამ ტიპის ამოცანები ხშირად ხვდება მოსწავლეებს ამოსახსნელად.

საკვანძო ამოცანა სახეებს მიაკუთვნებზენ აგრეთვე ისეთი სახის ამოცანებს, რომელთა ამოხსნა უშუალოდ უკავშირდება თეორიული მასალის ცოდნას. ასეთი სახის ამოცანის ამოხსნამდე მოსწავლეებს ზედმიწევნით კარგად უნდა გავაცნოთ ის თეორიული საკითხი, რომელზე დაყრდნობითაც უნდა განხორციელდეს ამოცანების ამოხსნა. მაგალითად, უნდა ამოვხსნათ ამოცანა [4].

ამოცანა 2. მსროლელი ახორციელებს ოთხ გასროლას. თითოეული გასროლის მიზანში მოხვედრის ალბათობაა $p=0,8$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

1. მსროლელი მიზანში მოახვედრებს 3-ჯერ.
2. მსროლელი მიზანში მოახვედრებს არანაკლებ სამჯერ.

ამ ამოცანის ანალიზიდან ირკვევა, რომ საჭიროა მოიძებნოს შესრულებული 4 გასროლიდან მიზანში მოხვდეს 3 ან არანაკლებ 3 გასროლა. ასეთი სახის ამოცანები ხშირად შეიძლება შეგვხვდეს ალბათობათა თეორიის ამოცანების ამოხსნისას, იმ პირობით, რომ მიზანში მოხვედრის ალბათობა თითოეული გასროლისას არ იცვლება. განვიხილოთ ასეთი ამოცანა ზოგად შემთხვევაში, როცა თითოეული გასროლის ალბათობა ერთნაირია და p -ს ტოლია, გასროლათა რაოდენობაა n და მიზანში მოხვედრათა რაოდენობა $k,(k\le n)$. ცხადია, რომ თითოეული გასროლის მიზანში მოხვედრა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. ეს არის ერთმა-ნეთისაგან დამოუკიდებელი ცდების გამეორების სქემა, ან სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ბერნულის სქემა. ამ სქემას ასეთი სახია ამოცანების ამოხსნისგან ფლობს სულ მცირე ორ უპირატესობას:

- განსხვავებით სხვა შემთხვევების განხილვისგან, ბერნულის სქემის გამოყენების დროს საჭირო არ არის რამდენიმე ფორმულის დამახსოვრება, ამ დროს უნდა დავიმახსოვროთ მხოლოდ ერთი ფორმულა;
- ბერნულის სქემის გამოყენებისას შეზღუდული არ არის მსროლელთა რაოდენობა, მსროლელთა რაოდენობა შეიძლება იყოს არა 2, 3 ან 4, არამედ პრაქტიკულად ნებისმიერი რაოდენობა.

ზოგადად, ფორმულირება ასეთია: ვთქვათ, ხორციელდება მიზანში n გასროლა. თითოეული გასროლის მიზანში მოხვედრის ალბათობაა p . ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოხვდება ზუსტად k ნასროლი, გამო-ითვლება ბერნულის ფორმულით:

$$P_{n}(k)=C_{n}^{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}=C_{n}^{k}\cdot p^{k}\cdot q^{n-k}.$$

ამის შემდეგ მასწავლებელი ახდენს დასმული ამოცანის ამოხსნას: ის მოსწავლეებს აუხსნის, რომ ეს ამოცანა ბერნულის ფორმულით უნდა ამოიხსნას. მისი პარამეტრებია $n=4$ (გასროლათა რაოდენობა), $p=0,8$ (თითოეული გასროლის მიზანში მოხვედრის ალბათობა), $q=1-p=1-0,8=0,2$ (აცილების ალბათობა).

1. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი მიზანში მოახვედრებს სამჯერ, ტოლია:

$$P_{4}(3)=C_{4}^{3}\cdot 0,8^{3}\cdot 0,2^{4-3}=4\cdot 0,8^{3}\cdot 0,2=0,4096 .$$

2. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი მიზანში მოახვედრებს არანაკლებ სამჯერ 4 გასროლიდან, ეს ნიშნავს, რომ მოახვედრებს ან 3-ჯერ ან 4-ჯერ. გამოვ-თვალოთ შესაბამისი ხდომილობების ალბათობები ტოლია:

$$P_4(k \geq 3) = P_4(3) + P_4(4) = 0,4096 + C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 \, 0,4096 + 0,4096 = 0,8192.$$

დასკვნა

ამრიგად, ძირითადი ამოცანების იდენტიფიცირება საშუალებას აძლევს მასწავლებელს, სისტემატიზაცია და ორგანიზება გაუკეთოს მასალას მოსწავლეებთან მუშაობისთვის, ასევე ქმნის შესაძლებლობებს ალბათობის თეორიის უფრო შეგნებული, ღრმა გაგების და ამოცანების ამოხსნის უნარების განვითარებისთვის.

ლიტერატურა

1. ბ. ბაკურაძე, გ. ბერძულიშვილი – მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. კერძო მეთოდიკა. ნაწილი I. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი. 2019 წელი. 345 გვ.
2. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი – გავიმეოროთ მათემატიკა. II ნაწილი გეომეტრია, მონაცემთა ანალიზი, სტატისტიკა, ალბათობა. რედაქტორი თ. ვეფხვაძე. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი. 2019 წ.
3. Бродский И.Л. Вероятность и статистика. 10-11 классы. Планирование и практикум: Пособие для учителя/ И.Л. Бродский, О.С. Мешавкина. – М.: Издательство Аркти, 2009. с. 28.
4. Ященко, Л.О. Рослова, Л.В. Кузнецов и др. 3000 задач с ответами по математике. под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2015. С. 431.

On One Methodological Approach to Teaching Elements of Probability Theory in High School

Bakur Bakuradze, Giorgi Berdzulishvili

Abstract

Teaching probability theory in high school involves numerous challenges. The topics of probability theory that students find particularly difficult usually relate to stochastic processes. Solving probability tasks requires somewhat different skills and reasoning methods compared to other types of mathematical problems. The methodology for teaching stochastic processes to high school students is not yet fully developed. Transferring methodological techniques used in higher education directly into high schools is not always effective, particularly in the context of solving probability tasks. It is essential to improve the methodology for teaching stochastic concepts in high schools. Teachers should pay special attention to foundational concepts in probability theory, which are critical for solving probability problems. Our teaching approach involves identifying key problems, teaching their solutions, and using them as a foundation to solve similar probability problems. Presented theoretical considerations are reinforced through practical exercises accompanied by appropriate methodological conclusions.

Keywords: event, probability, key problem, mathematical model.