0111 განათლების მეცნიერება EDUCATION SCIENCE

საძიებო ტექსტური ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი მეთოდიკური ასპექტი
(I ნაწილი)

ირმა ჩხიკვაძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
E-mail: irma.chkhikvadze@atsu.edu.ge
გიორგი ბერძულიშვილი
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
E-mail: giorgi.berdzulishvili@mail.ru

რეფერატი

ტექსტური ამოცანების ალგებრული მეთოდით ამოხსნის ერთ-ერთი მთავარი სირთულე არის უცნობი სიდიდის რაოდენობების არჩევა, რომლებიც ცვლადებით იქნება აღნიშნული. მეთოდურად გამართლებულია ცვლადით აღვნიშნოთ ის, რაც საპოვნია ამოცანის კითხვით, ან იმით, რომელიც აღწერს პროცესს. ჩვენი ინტერესის სფეროს წარმოადგენს ისეთი ტესტური ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას მიიღება სისტემები, რომელშიც განტოლებების რაოდენობა არ ემთხვევა ცვლადების რაოდენობას. დიდია ასეთი ამოცანების როლი და მნიშვნელობა მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების, ინტუიციის, შემოქმედებითი შესაძლებლობების განვითარებისა და მათში მაღალი მათემატიკური კულტურის ჩამოყალიბებაში. ცნობილია, რომ მასწავლებლებსაც ექმნებათ სერიოზული მეთოდოლოგიური პრობლემები ასეთი ამოცანების ამოხსნის სწავლებისას. მოსწავლეებმა ყურადღება უნდა მიაქციონ იმ ფაქტს, რომ ყოველთვის არ არის საჭირო ყველა ცვლადის პოვნა მიღებულ განტოლებებსა და უტოლობაში, არამედ საჭიროა ვიპოვოთ ცვლადების რაიმე კომბინაცია.

საკვანძო სიტყვები: ამოხსნის მეთოდი, განტოლებათა სისტემა, უტოლობათა სისტემა, შერეული სისტემა, მათემატიკური მოდელი.

შესავალი

სტატიაში წარმოდგენილი და განხილულია ისეთი ტესტური ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას მიიღება სისტემები, რომელშიც განტოლებების რაოდენობა არ ემთხვევა ცვლადების რაოდენობას. დიდია ასეთი ამოცანების როლი და მნიშვნელობა მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების, ინტუიციის, შემოქმედებითი შესაძლებლობების განვითარებისა და მათში მაღალი მათემატიკური კულტურის ჩამოყალიბებაში.

ძირითადი ნაწილი

ტექსტური ამოცანის ამოხსნის მეთოდს ცვლადების შემოტანით და განტოლებათა თუ უტოლობების შესაბამისი სისტემის შედგენით, მიაკუთვნებენ ტექსტური ამოცანების ამოხსნის ალგებრულ მეთოდს.

ტექსტური ამოცანების ამოხსნის ალგორითმი განტოლებათა და უტოლობათა სისტემების გამოყენებით:

- ამოცანის ტექსტში განხილული სიდიდეების შერჩევა და მათ შორის კავშირის დადგენა;
- ცვლადების შემოღება (ასოებით უცნობი სიდიდეების აღნიშვნა);
- განტოლებათა ან უტოლობათა სისტემის შედგენა შემოღებული ცვლადებისა და ამოცანის მონაცემების გამოყენებით;
- მიღებული განტოლებათა ან უტოლობათა სისტემის ამოხსნა;
- ნაპოვნი მნიშვნელობების შემოწმება ამოცანის პირობების მიხედვით;
- პასუხის ჩაწერა.

ტექსტური ამოცანების ალგებრული მეთოდით ამოხსნის ერთ-ერთი მთავარი სირთულე არის უცნობი სიდიდის ან რაოდენობების არჩევა, რომლებიც ცვლადებებით იქნება აღნიშნული. მეთოდურად გამართლებულია, ცვლადით აღვნიშნოთ ის, რაც საპოვნია ამოცანის კითხვით, ან იმით, რომელიც აღწერს პროცესს. მაგალითად, მოძრაობის ამოცანების ამოხსნა ეფუძნება წესის გამოყენებას: „მანძილი = სიჩქარე × დრო“. ეს ნიშნავს, რომ უცნობით უნდა აღვნიშნოთ ან მანძილი, ან დრო, ან სიჩქარე. აღნიშვნა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა არის მოცემული და რა არის საპოვნი. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია

სხვადასხვა ტიპის ალგებრული განტოლებების მიღება. ორივე სახის განტოლება: „სიჩქარე = მანძილი : დრო“ და „დრო = მანძილი : სიჩქარე“ – სინამდვილეში არის ერთი ფიზიკური ფორმულის ვარიანტები. არ აქვს არსებითი მნიშვნელობა, როგორ განტოლებებს მიიღებთ. არცერთი გზა არ არის ამოცანის ამოხსნის დაწყების არასწორი გზა, მთავარია, მოსწავლემ როგორმე დაიწყოს ამოცანის ამოხსნა. მთავარია ამოცანის ამოხსნის დასასრული იყოს სწორი. თუმცა, ამოხსნის პროცესი შეიძლება იყოს ოპტიმალური ან არაოპტიმალური. შეიძლება მოსწავლე აღმოჩნდეს ისეთი სისტემის წინაშე, რომელიც როგორც უცნობების, ისე განტოლების ამოხსნის თვალსაზრისით იყოს ზომაზე მეტად რთული. ამ შემთხვევაში, უმჯობესია ამოცანის ამოხსნის საწყის ეტაპზე დაბრუნება და სხვა აღნიშვნის შემოღება.

განტოლებათა სისტემის შედგენას აზრი აქვს, როცა ამოცანა მოიცავს ორ ან მეტ ობიექტს, რომლებზეც ერთდროულად მოქმედებს ორი ან მეტი ფაქტორი, დაწესებულია ორი ან მეტი თავსებადი პირობა და ა.შ. ასეთი სიტუაციები ბევრია ყოველდღიურ ცხოვრებაში, ტექნოლოგიებში, ეკონომიკაში და სხვ. ის მოსწავლეები, ვინც გეგმავს სწავლის გაგრძელებას, ხშირად შეხვდებიან სხვადასხვა რაოდენობის განტოლების სისტემებს სხვადასხვა რაოდენობის უცნობებით.

საოლიმპიადო და საძიებო ამოცანების ამოხსნის მეთოდების ანალიზიდან ჩანს ის სირთულეები, რომლებსაც სკოლის მოსწავლეები განიცდიან არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისას. ეს დაკვირვება ეხება არა მხოლოდ ჩვეულებრივ სკოლებს, არამედ სკოლებსაც, სადაც მათემატიკას ასწავლიან გაღრმავებულად. არასტანდარტული ამოცანები გაგებულია როგორც ამოცანები, რომლებიც უჩვეულოა როგორც მათი ფორმულირებით და შინაარსით, ასევე მათი ამოხსნის მეთოდებით. ეს მოიცავს ტექსტურ ამოცანებს მოძრაობაზე, ამოცანებს შესრულებულ სამუშაზე, შენადნობებზე, ნარევებზე, პროცენტებზე და სხვ. ჩვენი ინტერესის სფეროს წარმოადგენს ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას მიიღება განტოლებათა ან/და უტოლობათა ან/და შერეული სისტემები, რომელშიც განტოლებების რაოდენობა არ ემთხვევა ცვლადების რაოდენობას. ძალიან დიდია ასეთი ამოცანების როლი და მნიშვნელობა მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების, ინტუიციის, შემოქმედებითი შესაძლებლობების განვითარებისა და მათში მაღალი მათემატიკური კულტურის ჩამოყალიბებაში. ცნობილია, რომ მასწავლებლებსაც ექმნებათ სერიოზული მეთოდოლოგიური პრობლემები ასეთი ამოცანების ამოხსნის სწავლებისას.

ჩვენი აზრით, მასწავლებელი, უპირველეს ყოვლისა, უნდა დაეხმაროს მოსწავლეებს, დაძლიონ ფსიქოლოგიური ბარიერი და შიშის სინდრომი ასეთი სახის ახალი ამოცანების ამოხსნისას. მოსწავლეები ასეთი ამოცანების ამოხსნისას ხშირად ამბობენ რომ ასეთი განტოლებების, ან/და უტოლობების სისტემებს, ან/და შერეულ სისტემებს ისინი არ შეხვედრიან, ასეთი სახის მასალა არ გაუვლიათ და არ იციან როგორ ამოხსნან. მათ შეიძლება ვურჩიოთ, რომ მაქსიმალურად ყურადღებით შეისწავლონ ამოცანის შინაარსი, ჩაუღრმავდნენ ამოცანის პირობას, სწორად გაიაზრონ ამოცანაში დასმული კითხვა, რომელზეც უნდა უპასუხონ და ალგორითმების გამოყენების მცდელობის გარეშე, მოძებნონ ამოცანის ამოხსნის გზა. თუ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია ალგებრული მეთოდით, მაშინ აუცილებელია ცვლადების შერჩევა მათი რაოდენობის მინიმიზაციის სავალდებულო პირობის გარეშე, შემდეგ შეადგინონ განტოლებები ან უტოლობები ამოცანის შინაარსის შესაბამისად. ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეადგინონ ამოცანის მათემატიკური მოდელი. შემდეგ, მოსწავლეებმა ყურადღება უნდა მიაქციონ იმ ფაქტს, რომ ყოველთვის არ არის საჭირო ყველა ცვლადის პოვნა მიღებულ განტოლებებსა და უტოლობაში, არამედ საჭიროა, ვიპოვოთ ცვლადების რაიმე კომბინაცია. ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი ამოცანები:

ამოცანა 1.

აუზში წყალი ისხმება 4 მილიდან. როცა ერთდროულად ჩართულია პირველი, მეორე და მესამე მილები, ავზი ივსება 12 წუთში, როცა ერთდროულად ჩართულია მეორე და მეოთხე მილები, ავზი ივსება – 15 წუთში, ხოლო ერთდროულად ჩართული პირველი, მესამე და მეოთხე მილებით ავზი ივსება 20 წუთში. რა დროში აივსება ავზი, თუ ერთდროულად გავხსნით ოთხივე მილს?

ვთქვათ, მხოლოდ პირველი, მხოლოდ მეორე, მხოლოდ მესამე და მხოლოდ მეოთხე მილები ავზს ავსებენ შესაბამისად x, y, z და u წუთში. ამოცანის პირობის გათვალისწინებით, შეგვიძლია დავწეროთ სისტემა:

$$\{12(x+y+z)=15(x+u),\}$$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც ორი განტოლება და 4 უცნობია. თუ გავხსნით ფრჩხილებს და მსგავს წევრებს შევაერთებთ, მივიღებთ:

$$\{4x-y+4z-5u=0,\}$$

ამ სისტემაში z და u ცვლადები ჩავთვალოთ თავისუფალ ცვლადებად და ამოვხსნათ სისტემა x და y ცვლადების მიმართ როგორც წრფივ განტოლებათა სისტემა.

გვაქვს:

$$\{4x-y=-4z+5u,\}$$

თუ სისტემის პირველ განტოლებას გამოვაკლებთ მეორე განტოლეზას, მივიღებთ:

$$x=2u-z.$$

მიღებულ მნიშვნელობას თუ ჩავსვამთ სისტემის რომელიმე განტოლებაში და ჩავატარებთ სათანადო გამოთვლებს, მივიღებთ:

$$y=3u.$$

ამის შემდეგ, შესაძლებელია პასუხი გავცეთ ამოცანის კითხვას:

$$t=\frac{15(y+u)}{x+y+z+u}=\frac{15(3u+u)}{2u-z+3u+z+u}=\frac{15\cdot 4u}{6u}=10.$$

ე.ი. ოთხივე მილის გახსნით ავზი აივსება 10 წუთში.

ამოცანა 2.

A პუნქტიდან დროის ტოლი ინტერვალებით გამოდის სამი ავტომანქანა, რომლებიც ერთდროულად ჩადიან B პუნქტში და აგრძელებენ გზას C პუნქტისაკენ, რომელიც B პუნქტიდან 120 კმ-ით არის დაშორებული. პირველი ავტომანქანა C პუნქტში ჩადის მეორე ავტომანქანის ჩასვლიდან 1 საათის შემდეგ. მესამე ავტომანქანა, რომელიც ჩავიდა C პუნქტში, მაშინვე შემობრუნდა და გაემართა B პუნქტისაკენ და C პუნქტიდან 40 კმ-ზე ხვდება პირველ ავტომანქანას. იპოვეთ ავტომანქანების სიჩქარეები. ჩათვალეთ, რომ მთელი მგზავრობის პერიოდში თითოეული ავტომანქანის სიჩქარე არ შეცვლილა.

ვთქვათ, პირველი, მეორე და მესამე ავტომანქანების სიჩქარეებია შესაბამისად x კმ/სთ, y კმ/სთ და z კმ/სთ. a არის დროის შუალედი, რომლის გასვლის შემდეგ გამოდიან ავტომანქანები A პუნქტიდან B პუნქტისაკენ.

ამოცანის პირობის ძალით:

$$\frac{AB}{x}=\frac{AB}{y}+a=\frac{AB}{z}+2a. \qquad (1)$$

(1) ტოლობებით შეიძლება ჩავწეროთ სისტემის სახით, რომელშიც იქნება სამი განტოლება 5 უცნობით.

რადგან, B პუნქტიდან 120 კმ-ით დაშორებულ C პუნქტში პირველი ავტომანქანა ჩადის მეორე ავტომანქანის მისვლიდან 1 საათის შემდეგ, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება:

$$\frac{120}{x}=\frac{120}{y}+1.$$

მესამე ავტომანქანა, რომელიც მიდის C პუნქტში, მაშინვე შემობრუნდება და გაემართება B პუნქტისაკენ და C პუნქტიდან 40 კმ-ზე ხვდება პირველ ავტომანქანას, რაც ნიშნავს, რომ მესამე ავტომანქანა გაივლის $80+40=120$ (კმ), პირველი ავტომანქანა კი – $120-40=80$ (კმ). შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება:

$$\frac{80}{x}=\frac{160}{z}\Rightarrow z=2x.$$

$z=2x$ დამოკიდებულება გავითვალისწინოთ (1) ტოლობაში. გვექნება:

$$\frac{AB}{x}=\frac{AB}{z}+2a\Rightarrow\frac{AB}{x}=\frac{AB}{2x}+2a\Rightarrow\frac{AB}{2x}=2a\Rightarrow a=\frac{1}{4}\cdot\frac{AB}{x}.$$

$a=\frac{1}{4}\cdot\frac{AB}{x}$ გავითვალისწინოთ (1) დამოკიდებულებაში $\frac{AB}{x}=\frac{AB}{y}+a$, გვექნება:

$$\frac{AB}{x}=\frac{AB}{y}+\frac{1}{4}\cdot\frac{AB}{x}\Rightarrow\frac{3\cdot AB}{4\cdot x}=\frac{AB}{y}\Rightarrow\frac{3\cdot x}{4}=\frac{1}{4}\cdot y\Rightarrow y=\frac{4}{3}\cdot x.$$

$y=\frac{4}{3}\cdot x$ გავითვალისწინოთ განტოლებაში $\frac{120}{x}=\frac{120}{y}+1$, გვექნება: $x=30$ (კმ/სთ).

მარტივად შეგვიძლია გამოვთვალოთ, რომ $y=40$ კმ/სთ და $z=60$ კმ/სთ.

რადგან შედგენილი განტოლებების რაოდენობა ცვლადთა რაოდენობაზე ნაკლებია, ამიტომ შეუძლებელია ვიპოვოთ მანძილი A პუნქტიდან B პუნქტამდე (AB) , რა ტოლი დროის შუალედებით გამოდიოდნენ ავტომობილები A პუნქტიდან B პუნქტისაკენ, ანუ a -ს რიცხვითი მნიშვნელობა.

ამოცანა 3.

მიწისმთხრელთა ბრიგადის ყველა წევრი მუშაობს საათების ერთსა და იმავე რაოდენობას. ამასთან, თითოეული წევრის შრომის ნაყოფიერება ერთნაირია. ამ პირობებში ბრიგადას შეუძლია კაბელის ჩასადები ორმოს გაჭრა 6 დღეში. სამუშაოს დაწყებამდე ცნობილი გახდა, რომ ბრიგადის სამუშაო დღე შემცირდა 1 საათით და ბრიგადის წევრთა რაოდენობა 5-ით. ამ პირობებში ბრიგადას კაბელის ჩასადები ორმოს გაჭრა შეუძლია 9 დღეში. სინამდვილეში, ორმოს გაჭრას 12 დღე დაჭირდა, რადგან სამუშაო დღის ხანგრძლივობა შემცირდა არა 1, არამედ 2 საათით და ბრიგადის 2 წევრი ავდმყოფობის გამო სამუშაოზე ვერ გამოვიდა. რამდენი წევრი იყო ბრიგადაში თავიდან და რამდენი საათიანი სამუშაო დღე ქონდათ?

ვთქვათ, თავიდან ბრიგადაში იყო x მუშა და დღეში მუშაობდნენ $(y+2)$ საათს. მაშინ მთელი სამუშაოს შესრულებას დაჭირდებოდა $6x(y+2)$ ადამიან-სააათი. მეორე შემთხვევაში $9(x-5)(y+1)$ ადამიან-საათი, მესამე შემთხვევაში კი – $12(x-7)y$ ადამიან-საათი. რადგან სამივე შემთხვევაში შესრულებული სამუშაოს მოცულობა ერთნაირია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ განტოლებათა სისტემა:

$$6x(y+2)=9(x-5)(y+1)=12(x-7)y.$$

თუ ამ ტოლობებს სისტემის სახით ჩავწერთ, მივიღებთ ორი უცნობისგან შედგენილ სისტემას, რომელშიც სამი განტოლებაა. ეს სისტემა ტოლფასია სისტემის:

$$2x(y+2)=3(x-5)(y+1)=4(x-7)y.$$

საიდანაც, გვაქვს:

$$2x(y+2)=4(x-7)y\Rightarrow x(y-2)=14y.$$

$$2x(y+2)=3(x-5)(y+1)\Rightarrow x(y-1)=15(y+1).$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\frac{y-2}{y-1}=\frac{14\,y}{15(y+1)}\Rightarrow y^2-y-30=0\Rightarrow y=6\,.$$

თუ ჩავსვამთ $y=6$, $x(y-2)=14\,y$ ტოლობაში, მივიღებთ $x=21$.

ე.ი. ბრიგადის სამუშაო დღის ხანგრძლივობა იყო 8 საათი, ბრიგადაში იყო 21 წევრი.

დასკვნა

ამრიგადა, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მასწავლებლებსაც ექმნებათ სერიოზული მეთოდოლოგიური პრობლემები განხილული ამოცანების ამოხსნის სწავლებისას და მნიშვნელოვანია, განხორციელდეს ამ სირთულის თავიდან აცილებისთვის საჭირო გზების პოვნა. მაგალითად, მოსწავლეების ყურადღება მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ ყოველთვის არ არის საჭირო ყველა ცვლადის პოვნა მიღებულ განტოლებებსა და უტოლობაში, რომ ზოგჯერ საჭიროა ვიპოვოთ ცვლადების რაიმე კომბინაცია. ან, დავეხმაროთ მოსწავლეებს, დაძლიონ ფსიქოლოგიური ბარიერი და შიშის სინდრომი ასეთი სახის ახალი ამოცანების ამოხსნისას და სხვ.

ლიტერატურა

1. ირმა ჩხიკვაძე, გიორგი ბერძულიშვილი – განმავითარებელი და საძიებო ტექსტური ამოცანების ამოხსნის სწავლება საშუალო სკოლაში. პირველი ნაწილი. 320 გვ. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი. 2022. 320 გვ.
2. გიორგი ბერძულიშვილი – სასკოლო და საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები. მონოგრაფია. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი. 2018. 546 გვ.
3. გ. ბერძულიშვილი, გ. ბრეგაძე, გ. მარგველაშვილი – საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკა. სპეციალური მეთოდიკა. მონოგრაფია. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი. 2019. 536 გვ.
4. В. Ф. Чаплыгин-Нестандартные задачи. Некоторые методические аспекты. Ярославский педагогический вестник. 1998. № 3 (15). стр. 96-104.

Some Methodological Aspects of Solving Textual Search Problems
(Part I)

Irma Chkhikvadze, Giorgi Berdzulishvili

Abstract

One primary difficulty in algebraic solutions to textual problems is deciding the number of unknown quantities represented by variables. Methodologically, it is justified to assign variables to what needs to be found or to aspects describing the process. We focus on textual problems that result in systems where the number of equations does not match the number of variables. Such problems significantly enhance students' logical thinking, intuition, creativity, and overall mathematical culture. Teachers often face substantial methodological challenges teaching these problem-solving methods. Students must understand that it is not always necessary to find every variable in equations and inequalities but to seek particular combinations of variables.

Keywords: solution method, equation systems, inequality systems, mixed systems, mathematical model.