0111 განათლების მეცნიერება EDUCATION SCIENCE

საძიებო ტექსტური ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი მეთოდიკური ასპექტი
(II ნაწილი)

ირმა ჩხიკვაძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
E-mail: irma.chkhikvadze@atsu.edu.ge
გიორგი ბერძულიშვილი
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
E-mail: giorgi.berdzulishvili@mail.ru

რეფერატი

ტექსტური ამოცანების ალგებრული მეთოდით ამოხსნის ერთ-ერთი მთავარი სირთულე არის უცნობი სიდიდის რაოდენობების არჩევა, რომლებიც ცვლადებებით იქნება აღნიშნული. მეთოდურად გამართლებულია ცვლადით აღვნიშნოთ ის, რაც საპოვნია ამოცანის კითხვით, ან იმით, რომელიც აღწერს პროცესს. ჩვენი ინტერესის სფეროს წარმოადგენს ისეთი ტესტური ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას მიიღება სისტემები, რომელშიც განტოლებების რაოდენობა არ ემთხვევა ცვლადების რაოდენობას. დიდია ასეთი ამოცანების როლი და მნიშვნელობა მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების, ინტუიციის, შემოქმედებითი შესაძლებლობების განვითარებისა და მათში მაღალი მათემატიკური კულტურის ჩამოყალიბებაში. ცნობილია, რომ მასწავლებლებსაც ექმნებათ სერიოზული მეთოდოლოგიური პრობლემები ასეთი ამოცანების ამოხსნის სწავლებისას. მოსწავლეებმა ყურადღება უნდა მიაქციონ იმ ფაქტს, რომ ყოველთვის არ არის საჭირო ყველა ცვლადის პოვნა მიღებულ განტოლებებსა და უტოლობაში, არამედ საჭიროა ვიპოვოთ ცვლადების რაიმე კომბინაცია.

საკვანძო სიტყვები: ამოხსნის მეთოდი, განტოლებათა სისტემა, უტოლობათა სისტემა, შერეული სისტემა, მათემატიკური მოდელი.

შესავალი

ტექსტური ამოცანის ამოხსნის მეთოდს ცვლადების შემოტანით და განტოლებათა თუ უტოლობების შესაბამისი სისტემის შედგენით, მიაკუთვნებენ ტექსტური ამოცანების ამოხსნის ალგებრულ მეთოდს. სტატიაში წარმოდგენილი და განხილულია ისეთი ტესტური ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას მიიღება სისტემები, რომელშიც განტოლებების რაოდენობა არ ემთხვევა ცვლადების რაოდენობას. დიდია ასეთი ამოცანების როლი და მნიშვნელობა მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების, ინტუიციის, შემოქმედებითი შესაძლებლობების განვითარებისა და მათში მაღალი მათემატიკური კულტურის ჩამოყალიბებაში.

ძირითადი ნაწილი

ტექსტური ამოცანების ამოხსნისას აუცილებელია: ამოცანის ტექსტში განხილული სიდიდეების შერჩევა და მათ შორის კავშირის დადგენა, გარკვეული ცვლადების შემოღება (ასოებით უცნობი სიდიდეების აღნიშვნა), განტოლებათა ან უტოლობათა სისტემის შედგენა შემოღებული ცვლადებისა და ამოცანის მონაცემების გამოყენებით, მიღებული განტოლებათა ან უტოლობათა სისტემის ამოხსნა, ნაპოვნი მნიშვნელობების შემოწმება ამოცანის პირობების მიხედვით და პასუხის ჩაწერა.

ტექსტური ამოცანების ალგებრული მეთოდით ამოხსნის ერთ-ერთი მთავარი სირთულე არის უცნობი სიდიდის ან რაოდენობების არჩევა, რომლებიც ცვლადებებით იქნება აღნიშნული. მეთოდურად გამართლებულია, ცვლადით აღვნიშნოთ ის, რაც საპოვნია ამოცანის კითხვით, ან იმით, რომელიც აღწერს პროცესს. აღნიშნულის მიუხედავად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სკოლის მოსწავლეები განიცდიან სირთულეებს არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისას. ეს დაკვირვება ეხება არა მხოლოდ ჩვეულებრივ სკოლებს, არამედ სკოლებსაც, სადაც მათემატიკას ასწავლიან გაღრმავებულად. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ძალიან დიდია ასეთი ამოცანების როლი და მნიშვნელობა მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების, ინტუიციის, შემოქმედებითი შესაძლებლობების განვითარებისა და მათში მაღალი მათემატიკური კულტურის ჩამოყალიბებაში. ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი ამოცანები:

ამოცანა 4.

A და B პუნქტებიდან ერთდროულად გამოდის ორი ავტომობილი და ერთმანეთს ხვდება დღის 12 საათზე. თუ პირველი ავტომობილის სიჩქარეს ორჯერ გავზრდით და მეორეს სიჩქარეს იგივეს დავტოვებთ, მაშინ შეხვედრა შედგება 56 წუთით ადრე. თუ მეორე ავტომობილის სიჩქარეს ორჯერ გავზრდით და პირველის სიჩქარეს იგივეს დავტოვებთ, მაშინ შეხვედრა შედგება 65 წუთით ადრე. განსაზღვრეთ შეხვედრის დრო იმ შემთხვევაში, როცა ორივე ავტომობილის სიჩქარე გაორმაგდება.

ვთქვათ, A პუნქტიდან გამოსული ავტომობილის სიჩქარეა x კმ/სთ და B პუნქტიდან გამოსული ავტომობილის სიჩქარეა y კმ/სთ. როცა ავტომობილები ერთდროულად გამოდიან A და B პუნქტებიდან და ერთმანეთს ხვდებიან დღის 12 საათზე, მაშინ თითოეულის მოძრაობის დრო იყოს სთ. ეს ნიშნავს, რომ მანძილი A და B პუნქტებს შორის არის $t(x+y)$ კმ.

$t(x+y)$ კმ მანძილის გავლას $2x$ კმ/სთ სიჩქარით და მის საპირისპიროდ y კმ/სთ მოძრავი ავტომობილები გადიან $\left(t-\frac{14}{15}\right)$ სთ-ში. რის გამოც შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება.

$$\left(t-\frac{14}{15}\right)(2x+y)=t(x+y).$$

ანალოგიურად, $t(x+y)$ კმ მანძილის გავლას x კმ/სთ სიჩქარით და მის საპირისპიროდ $2y$ კმ/სთ მოძრავი ავტომობილები გადიან $\left(t-\frac{13}{12}\right)$ სთ-ში. რის გამოც შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება.

$$\left(t-\frac{13}{12}\right)(x+2y)=t(x+y).$$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემა:

$$\left\{\left(t-\frac{14}{15}\right)(2x+y)=t(x+y),\right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემაში ორი განტოლება და 3 უცნობია. აქაც, ყველა უცნობის ცალსახად გამოთვლა არ მოხერხდება. ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $\left(12-\frac{t}{2}\right)$ სთ. მართლაც, $\frac{t(x+y)}{2x+2y}=\frac{t(x+y)}{2(x+y)}=\frac{t}{2}$ არის დრო, როცა A და B პუნქტებიდან გამოსული ავტომობილების სიჩქარე გაორმაგებულია თავდაპირველ სიჩქარესთან შედარებით, ხოლო $\left(12-\frac{t}{2}\right)$ სთ არის გაორმაგებული სიჩქარით მოძრავი ავტომანქანების შეხვედრის დრო.

სისტემის პირველი განტოლებიდან შესაბამისად გვაქვს:

$$t=\frac{28x+14y}{15x} \quad \text{და} \quad t=\frac{13x+26y}{12y}.$$

მიღებულ ბოლო ორ ტოლობაში ერთმანეთს გავუტოლოთ მარჯვენა ნაწილები. მივიღებთ:

$$65x^2+18xy-56y^2=0.$$

თუ განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ $y^2\neq 0$ -ზე და შემოვიღებთ აღნიშვნას: $u=\frac{x}{y}$, გვექნება:

$$65u^2+18u-56=0.$$

საიდანაც,

$$u_1=\frac{52}{65}=\frac{4}{5}. \text{ ან } u_2=\frac{-70}{65}=\frac{-14}{13}.$$

ცხადია, რომ მეორე ფესვი არ გამოდგება.

ე.ი.

$$\frac{x}{y}=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\frac{4}{5}y.$$

მაშინ,

$$t=\frac{13x+26y}{12y}=\frac{13\cdot\frac{4}{5}y+26y}{12y}=\frac{52+130}{60}=\frac{182}{60} \text{ (სთ)}.$$

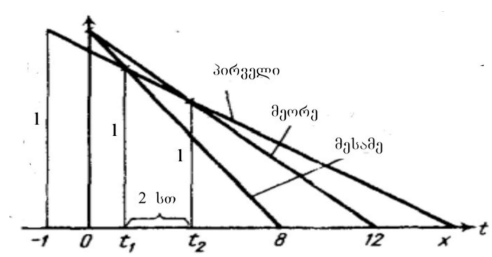
საიდანაც,

$$\frac{t}{2}=\frac{91}{60} \text{ (სთ)}.$$

ანუ 1 სთ და 31 წთ. რაც ნიშნავს, რომ ავტომობილების შეხვედრა, როცა ორივე ავტომობილის სიჩქარე გაორმაგებულია მოხდება 12 საათამდე 1 სთ და 31 წუთით ადრე, ანუ 10 საათსა და 29 წუთზე.

ამოცანა 5.

სამი სანთელი ერთნაირი სიგრძის, მაგრამ სხვადასხვა სიგანისაა. პირველი სანთელის ანთებიდან 1 სთ-ის შემდეგ ერთდროულად აანთეს დანარჩენი ორი სანთელი. სანთლების ანთებიდან რაღაც მომენტში პირველი და მესამე სანთლები ერთნაირი სიგრძის გახდნენ, ხოლო ამ მომენტიდან ზუსტად 2 საათის შემდეგ ერთნაირი სიგრძის გახდა პირველი და მეორე სანთლები. რა დროში ჩაქრება პირველი სანთელი, თუ მეორე სანთელი ჩაქრება 12 საათში, ხოლო მესამე – 8 საათში?



ვთქვათ, სანთლების თავდაპირველი სიგრძეა l. როცა პირველი და მესამე სანთლების სიგრძეები ერთნაირი გახდა სანთლების სიგრძე იყოს l_1, ხოლო როცა პირველი და მეორე სანთლების სიგრძეები ერთმანეთის ტოლი გახდა მათი სიგრძე იყოს l_2.

დავუშვათ, სანთლების დაწვის პროცესი მიმდინარეობს თანაბრად და ეს პროცესი გამოვსახოთ გრაფიკულად. ვთქვათ, პირველი სანთელი სრულად დაიწვება x საათში. რადგან პირველი სანთელი 1 საათით ადრე აანთეს, ვიდრე მეორე და მესამე სანთლები, ამიტომ დროის ღერძზე მისი საწყისი კოორდინატი იყოს – 1, ხოლო მეორე და მესამე სანთლების საწყისი დროის კოორდინატი იქნება – 0. დროის ღერძზე პირველი სანთლის სრულად დაწვის კოორდინატი დროის ღერძზე იქნება x (სთ). გრაფიკიდან ჩანს, რომ პირველი სანთლის სრულად დაწვის დროა $(x+1)$ საათი. t_1 – აღვნიშნოთ დროის ის მომენტი, როცა პირველი და მესამე სანთლების სიგრძეები გახდა l_1, l_2 -ით – დროის ის მომენტი, როცა პირველი და მეორე სანთლების სიგრძეები გახდა l_2. ამოცანის პირობის თანახმად,

$t_2-t_1=2$ (სთ). მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარე, მარტივად შეგვიძლია დავწეროთ განტოლებათა შერეული სისტემა:

$$\left\{\frac{x-t_2}{l_2}=\frac{\mathrm{x}+1}{l},\right\}\left\{\frac{12-t_2}{l_2}=\frac{12}{l},\right\}\left\{\frac{x-t_1}{l_1}=\frac{\mathrm{x}+1}{l},\right\}\left\{\frac{8-t_1}{l_1}=\frac{8}{l},\right\}\left\{t_2-t_1=2,\right\} \quad (1)$$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც 5 განტოლება და $\mathrm{x}, \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \mathrm{l}, \mathrm{l}_1, \mathrm{l}_2$ 6-უცნობია. ე.ი. ყველა უცნობის გამოთვლა შეუძლებელია, მაგრამ ჩვენთვის მთავარია ვიპოვოთ x . იმედია, ამის პოვნა მოხერხდება. შესაძლებელი იყო თავიდან ცვლადები ისე შეგვერჩია, რომ სანთლის თავდაპირველი სიგრძე ჩაგვეთვალა 1-ის ტოლად. ცხადია, მაშინ ცვლადების რაოდენობა შემცირდებოდა, მაგრამ შესაძლებელი იქნებოდა არა რეალურად l_1 და l_2 სიგრძეების პოვნა, არამედ ერთეულ სიგრძესთან მათი ფარდობა. რაც შედგენილი სისტემითაც არის შესაძლებელი.

შევეცადოთ ამოვხსნათ (1) შერეული სისტემა. სისტემის განტოლებები ჩავწეროთ ასე:

$$\left\{\frac{l}{l_2}=\frac{\mathrm{x}+1}{x-t_2},\right\}\left\{\frac{l}{l_2}=\frac{12}{12-t_2},\right\}\left\{\frac{l}{l_1}=\frac{\mathrm{x}+1}{x-t_1},\right\}\left\{\frac{l}{l_1}=\frac{8}{8-t_1},\right\}\left\{t_2-t_1=2,\right\}$$

სისტემის პირველი და მეორე განტოლებების მარცხენა ნაწილები ტოლია, გავუტოლოთ მარჯვენა ნაწილები ერთმანეთს, მივიღებთ:

$$t_2=\frac{12}{x-11}\ .$$

ანალოგიურად, სისტემის მესამე და მეოთხე განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$t_1=\frac{8}{x-7}\ .$$

გავითვალისწინთ, რომ $t_2-t_1=2$, მივიღებთ:

$$\frac{12}{x-11}-\frac{8}{x-7}=2.$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას: $x^2-20\mathrm{x}+75=0.$

რომლის ფესვებია: $x_1=15, x_2=5.$

რადგან $\mathrm{x}>13$, ამიტომ მეორე ფესვი არ გამოდგება. დაგვრჩა $\mathrm{x}=15.$ ე.ი. პირველი სანთელი სულ დაიწვება 16 საათში.

განვიხილოთ ამოცანა, რომლის ამოხსნა დაიყვანება შერეული სისტემის ამოხსნაზე.

ამოცანა 6.

ერთი კლასის მოსწავლეებმა გადაწყვიტეს ექსკურსიაზე წასვლა. სააგენტომ მათ განუცხადა, რომ მგზავრობის ღირებულება დამოკიდებულია ტრანსპორტზე და ღირს 170 ლარიდან 195 ლარამდე. ბოლო მომენტში კლასის ორმა მოსწავლემ ექსკურსიაზე წასვლა გადაიფიქრა, რის გამოც დარჩენილ მოსწავლეებს დაჭირდათ გათვალისწინებულზე 1 ლარით მეტის გადახდა. რა თანხა გადაიხადეს სტუდენტებმა სააგენტოში?

ვთქვათ, კლასში მოსწავლეთა რაოდენობაა x და y – თანხის ის რაოდენობა, რომელიც თავდაპირველად უნდა დაედო თითოეულ მოსწავლეს ექსკურსიაზე წასასვლელად. ამ ამოცანის ამოსახსნელად მოსწავლეთა ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმას, რომ ჩვენ ცვლადით არ აღვნიშნეთ

ექსკურსიის ღირებულება, რადგან ამით გართულდებოდა ამოცანის ამოხსნის პროცესი. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ შერეული სისტემა:

$$\{xy=(x-2)(y+1),\}$$

საიდანაც:

$$\{x-2y=2,\}$$

ამ შემთხვევაში შეიძლება დაისვას კითხვა: რატომ გამოვრიცხეთ y ცვლადი? ამოცანის პირობიდან ცხადია, რომ x ნატურალური რიცხვია, რადგან გამოსახავს კლასში მოსწავლეთა რაოდენობას და ამით არის განპირობებული y ცვლადის გამორიცხვა.

სისტემის უტოლობების ამოხსნით მივიღებთ:

$$19<1+\sqrt{341}\le x\le 1+\sqrt{391}<21\Rightarrow x=20.$$

როცა $x=20$, გამოვთვლით, რომ $y=9$. ამის შემდეგ მარტივად დავასკვნით, რომ ექსკურსიის ტრანსპორტირების ღირებულებაა $xy=20\cdot 9=180$ ლარი.

დასკვნა

ამრიგად, ჩვენი ინტერესის სფეროა მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების, ინტუიციის, შემოქმედებითი შესაძლებლობების განვითარებისა და მათში მაღალი მათემატიკური კულტურის ჩამოყალიბების პროცესში გამოვიყენოთი ტესტური ამოცანები, ხოლო ამ ამოცანების ამოხსნისას წარმოქმნილი სირთულეები მაქსიმალურად ავიცილოთ თავიდან სხვადასხვა მეთოდოლოგიების დახმარებით.

ლიტერატურა

1. ირმა ჩხიკვაძე, გიორგი ბერძულიშვილი – განმავითარებელი და საძიებო ტექსტური ამოცანების ამოხსნის სწავლება საშუალო სკოლაში. პირველი ნაწილი. 320 გვ. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი. 2022. 320 გვ.
2. გიორგი ბერძულიშვილი – სასკოლო და საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები. მონოგრაფია. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი. 2018. 546 გვ.
3. გ. ბერძულიშვილი, გ. ბრეგაძე, გ. მარგველაშვილი – საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკა. სპეციალური მეთოდიკა. მონოგრაფია. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი. 2019. 536 გვ.
4. В. Ф. Чаплыгин-Нестандартные задачи. Некоторые методические аспекты. Ярославский педагогический вестник. 1998. № 3 (15). стр. 96-104.

Some Methodological Aspects of Solving Textual Search Problems
(Part II)

Irma Chkhikvadze, Giorgi Berdzulishvili

Abstract

One primary difficulty in algebraic solutions to textual problems is deciding the number of unknown quantities represented by variables. Methodologically, it is justified to assign variables to what needs to be found or to aspects describing the process. We focus on textual problems that result in systems where the number of equations does not match the number of variables. Such problems significantly enhance students' logical thinking, intuition, creativity, and overall mathematical culture. Teachers often face substantial methodological challenges teaching these problem-solving methods. Students must understand that it is not always necessary to find every variable in equations and inequalities but to seek particular combinations of variables.

Keywords: solution method, equation systems, inequality systems, mixed systems, mathematical model.