ს ა ე რ თ ა შ ო რ ი ს ო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ი ნ ტ ე ლ ე ქ ტ ი“
I N T E R N A T I O N A L PERIODICAL SCIENTIFIC JOURNAL “I N T E L L E C T I”
№ 3 (77), 2024

0541 მათემატიკა MATHEMATICS

მწკრივის ორჯერ გაწარმოებით მიღებული მწკრივის ბორელის მეთოდით შეჯამებადობის შესახებ

ქეთევან შვანგირაძე
ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
E-mail: ketevan.shvangiradze@atsu.edu.ge

რეფერატი

ნაშრომში ნაჩვენებია **2π** პერიოდული ორი ცვლადის ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის ორჯერ გაწარმოებით მიღებული მწკრივის ბორელის მეთოდით წერტილში შეჯამებადობის შესახებ, როცა ამ წერტილში ფუნქციას აქვს მეორე რიგის შერეული ინტეგრალური წარმოებული.

საკვანძო სიტყვები: ფურიეს ორმაგი მწკრივი, შერეული წარმოებული, შეჯამებადობა, ბორელის მეთოდი.

განვიხოლოთ **2π** პერიოდული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი და გამოვიყენოთ მწკრივის შეჯამებადობის **B**–მეთოდი, ვაჩვენოთ, რომ გული $\rho(t,\tau)$ ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

1) $$\lim_{z\to\infty}\int_0^{\pi}\rho(t,\tau)\,dt=1$$

2) $$\lim_{z\to\infty}\int_0^{\pi}\omega_x(t)\rho(t,\tau)\,dt=0$$

დამტკიცება. 1) $\rho(t,\tau)=e^{-\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}n^2t^2cosnt\right)\frac{\tau^m}{m!}$ ტოლობიდან

$$\int_0^{\pi}\rho(t,\tau)\,dt=\frac{-e^{-\tau}}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}n^2t^2cosnt\right)\frac{\tau^m}{m!}\right)dt \qquad (1)$$

რადგან ყოველი $\tau>0$ რიცხვისათვის გვაქვს:

$$\left|\sum_{n=1}^{m}n^2t^2cosnt\cdot\frac{\tau^m}{m!}\right|\le\pi^2\left(\sum_{n=1}^{m}n^2\right)\cdot\frac{\tau^m}{m!}=\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\tau^m}{(m-3)!}\cdot\frac{(m+1)(2m+1)}{(m-1)(m-2)}\le$$

$$\le\frac{M\pi^2}{6}\cdot\frac{\tau^m}{(m-1)!}$$

სადაც:

$\frac{(m+1)(2m+1)}{(m-1)(m-2)} \leq M$, და ნებისმიერი $\tau = \tau_0$-სათვის მწკრივი $\frac{M\pi^2}{6} \cdot \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\tau_0^m}{(m-3)!}$ კრებადია, ამიტომ, (1) ტოლობაში მონაწილე მწკრივი თანაბრად კრებადია, როცა $0 \leq \tau \leq \pi$; შეგვიძლია მისი წევრობრივი ინტეგრება:

$$\int_0^{\pi} \rho dt = \frac{-e^{-\tau}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} n^2 \int_0^{\pi} t^2 cosntdt \right) \frac{\tau^m}{m!}$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრება ორჯერ, მივიღებთ:

$$\int_0^{\pi} \rho dt = -2e^{-\tau} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} (-1^n) \right) \frac{\tau^m}{m!} =$$

$$-2e^{-\tau} \sum_{k=1}^{m} (-1^n) \frac{\tau^{2k+1}}{(2k+1)!} = -2e^{-\tau} \sum_{k=1}^{m} \frac{\tau^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (2)$$

ვთქვათ (2) მწკრივის ჯამია $S(\tau)$

$$S(\tau) = \tau + \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^5}{5!} + \ldots; \quad S'(\tau) = 1 + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} + \ldots; \quad S''(\tau) = \tau + \frac{\tau^3}{3!} + ¿\ldots;$$

მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება $S'' - S = 0$, რომლის კერძო ამონახსენი, საწყისი პირობებით $S(0) = 0, S'(0) = 1$ არის $\mathbf{S}(\tau) = \frac{1}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau})$.

$$\int_0^{\pi} \rho(t,\tau) dt = 1 - e^{-2\tau}$$

საიდანაც ვღებულობთ გულის პირველ თვისებას.

მეორე თვისების დამტკიცება.

2) $\rho(t,\tau) = e^{-\tau} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\pi} \sum_{n=1}^{m} n^2 t^2 cosnt \right) \frac{\tau^m}{m!}$ ტოლობიდან გვაქვს:

$$\int_0^{\pi} \omega_x(t) \rho(t,\tau) dt = \int_0^{\pi} e^{-\tau} \omega_x(t) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\pi} \sum_{n=1}^{m} n^2 t^2 cosnt \right) \frac{\tau^m}{m!} dt$$

რადგან მწკრივი ყოველი τ–სათვის არამარტო თანაბრადკრებადია $[0,\pi]$ შუალედში, არამედ აბსოლუტურადაა, ამიტომ გვექნება:

$$\left| \int_0^{\pi} \omega_x(t) \rho(t,\tau) dt \right| = \frac{1}{\pi} e^{-\tau} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} n^2 \int_0^{\pi} \omega_x(t) t^2 cosntdt \right) \right| \frac{\tau^m}{m!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} e^{-\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} n^2 \int_0^{\pi} |\omega_x(t)| t^2 |cosnt| dt \right) \frac{\tau^m}{m!} \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2 C}{3} e^{-\tau} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} n^2 \right) \cdot \frac{\tau^m}{m!} = \frac{\pi^2 C}{18} e^{-\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+1)(2m+1)}{(m-1)!} \cdot \tau^m = ¿$$

$$\frac{\pi^2 C}{18} e^{-\tau} (6\tau + 15\tau^2 + 14\tau^3 + 7{,}4\tau^4) + \sum_{m=5}^{\infty} \frac{(m+1)(2m+1)}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)} \cdot \frac{\tau^m}{(m-5)!}$$

აბელის გარდაქმნიდან გამომდინარე შედეგის თანახმად:

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \right| \leq L \alpha_i \qquad (3)$$

სადაც α_i – არაზრდადი დადებითი რიცხვებია. **L** კი $B_i = \sum_{k=1}^{i} \beta_k$ რიცხვების მოდულთა ზედა საზღვარი, $|B_i| \leq L$

ვთქვათ, $\alpha_m = \frac{\tau^m}{(m-5)!}$ **,** $\alpha_{m+1} - \alpha_m = \frac{\tau^m (\tau - m + 4)}{(m-4)!}$

თუ $m = [\tau + 5]$ – (მთელი ნაწილი), მაშინ $\alpha_{m+1} - \alpha_m < 0$, როცა $m > \tau + 4$ ე.ი. α_m არაზრდადი და დადებითი რიცხვებია.

$$\beta_m = \frac{(m+1)(2m+1)\tau - m + 4}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}$$

$$B_m = \sum_{k=5}^{m} \frac{(k+1)(2k+1)}{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}$$

რადგან მწკრივი $\sum_{k=5}^{m} \frac{(k+1)(2k+1)}{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}$ კრებადია, ამიტომ, B_m

მიმდევრობა შემოსაზღვრულია $B_m \leq L$; (3) შეფასების თანამხმად

$$\sum_{m=5}^{p} \frac{(m+1)(2m+1)}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)} \cdot \frac{\tau^m}{(m-5)!} \leq L.\tau$$

ვთქვათ $P \to \infty$, მივიღებთ შეფასებას:

$$\left| \int_0^{\pi} \omega_x(t) \rho(t,\tau) dt \right| \leq \frac{\pi^2 C}{18} \cdot \left(\frac{6\tau}{e^{\tau}} + \frac{6\tau^2}{e^{\tau}} + \frac{14\tau^3}{e^{\tau}} + \frac{7{,}5\tau^4}{e^{\tau}} + \frac{L\tau}{e^{\tau}} \right)$$

თუ $\tau \to \infty$, მივიღებთ გულის მეორე თვისების დამტკიცებას. ტოლობიდან

$$\sigma(\tau)=C_1^{\square} D_1 f(x)\int_0^{\pi} \rho(t,z)\,dt-\int_0^{\pi} \omega_x(t)\rho(t,z)\,dt$$

გვექნება:

$$\lim_{\tau\to 0}\sigma(\tau)=C_1^{\square} D_1 f(x)$$

ვთქვათ 2π პერიოდული ორი ცვლადის ფუნქცია $f(x,y)GL(Q)$,

სადაც $Q=(-\pi;\pi;-\pi;\pi)$.ვიგულისხმოთ მას (x,y) წერტილში ავქვს მეორე რიგის ინტეგრალური სიმეტრიული წარმოებული

$$C_1^{\square} D_2 f(x,y)=\lim_{n,b\to 0}\frac{1}{h^2 l^2}\int_0^{h}\int_0^{l} f(x+t,y+\tau)-f(x+t,y-\tau)-f(x-t,y+\tau)+¿$$

$$+f(x-t,y-\tau)\,dtd\tau$$

შევადგინოთ f ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივი:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\lambda_{mn}(a_{mn}cosmxcosny+b_{mn}cosmxsinny+c_{mn}sinmxcosny+d_{mn}sinmxsinny)\ (4)$$

სადაც

$$\lambda_{mn}\begin{cases}\frac{1}{4},\text{თუ}\ m=n=0\\ \frac{1}{2},\text{თუ}\ m=0,n>0\ \text{ან}\ m>0,n=0\\ 1,\text{თუ}\ m>0,n>0\end{cases}$$

$$a_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q^{\square} f(x,y)\,c\,osmxcosny\,dxdy,\quad a_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q^{\square} f(x,y)\,cosmxsinny\,dxdy,$$

$$C_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q^{\square} f(x,y)\,sinmxcosny\,dxdy,\quad d_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q^{\square} f(x,y)\,sinmxsinny\,dxdy,$$

გავაწარმოოთ (4) მწკრივი ჯერ **x**–ით, შემდეგ **y**–ით მივიღებთ

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} mn$$

$$+d_{mn}\,cosmxcosny \tag{5}$$

თეორემა: თუ $f\in L(Q)_{\square}$ 2π პერიოდულ ფუნქციას $(x,y)\in Q$ წერტილში აქვს სასრული $C_1^{\square} D_2 f(x,y)$ წარმოებული, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივის ორჯერ გაწარმოებით მიღებული მწკრივი (5) ბორელის მეთოდით შეჯამებადია (x,y) წერტილში $C_1^{\square} D_2 f(x,y)$ წარმოებულის მნიშვნელობისაკენ.

ამ თეორემის დასკვნა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა f ფუნქციას წერტილში აქვს $f''_{x,y}(x,y)$, $C_1^{\square} D_2 f(x,y)$ წარმოებულთაგან რომელიმე, რადგან ყოველი მათგანის არსებობა განაპირობებს $C_1^{\square} D_2 f(x,y)$ წარმოებულის არსებობას.

ლიტერატურა

1. Н.И. Привалов. О джифференциоровании Фурье М.С. Т. 320-324.
2. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференционального и интегрального исчисления «Н». Ф.М.Л.М. 1969. Т.III.
3. Г. Харди. Расходяшиеся ряды. Изд. Ин. лит. Москва, 1951.

On Summarization by Borel’s method of the row obtained by producing the row twice

Ketevan Shvangiradze

Abstract

The paper shows the summability at a point of the series obtained by multiplying the Fourier double series of a 2π periodic function of two variables by the Borel method, when the function has a mixed integral derivative of the second order at this point.

Key words: Double Fourier series, mixed derivative, summability, Borel’s method.