ს ა ე რ თ ა შ ო რ ი ს ო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ი ნ ტ ე ლ ე ქ ტ ი“
I N T E R N A T I O N A L PERIODICAL SCIENTIFIC JOURNAL “I N T E L L E C T I”
№ 2 (79), 2025

0541 მათემატიკა MATHEMATICS

წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა სიმპლექს-მეთოდით

მაკა ლომთაძე
ევროპის ცენტრალური უნივერსიტეტი,
ბიზნესის ტექნოლოგიური უნივერსიტეტი
E-mail: maka.lomtadze@btu.edu.ge
E-mail: maka.lomtadze@unik.edu.ge

რეფერატი

თანამედროვე ეპოქაში რთული იქნება ეკონომიკური პროცესების მართვა და კონტროლი მათემატიკური მეთოდების შესწავლის და გამოყენების გარეშე. თუ გავითვალისწინებთ ეკონომიკის კომპიუტერიზაციის პროცესს, რომლის დახმარებითაც ურთულესი ეკონომიკური სტრუქტურის რეალური აღწერაა შესაძლებელი, გამოყენებითი მათემატიკის მეთოდებს გვერდს ვერ ავუვლით. უფრო მეტიც, ეკონომიკური პროცესების მართვისათვის მათემატიკის ღრმა ცოდნა აუცილებელია. ჩვენი მიზანია, ნაშრომში ვაჩვენოთ მათემატიკური მეთოდების გამოყენების გზა და შესაძლებლობა ეკონომიკური ამოცანების შესწავლის პროცესში. ეკონომიკის სფეროში ძირითადად მენეჯერი იღებს გადაწყვეტილებებს. მსხვილ ფირმებს ჰყავთ ანალიტიკოსები, რომელთა დანიშნულებაა მენეჯერისთვის რთულ სიტუაციაში გადაწყვეტილების მიღებაში დახმარება. ანალიტიკოსები კი, ძირითადად გამოყენებითი მათემატიკის სპეციალისტები არიან, რომლებიც ცდილობენ, სამართავ ობიექტზე არსებული რთული სიტუაცია აღწერონ მათემატიკური მოდელის სახით.

საკვანძო სიტყვები: მიზნის ფუნქცია, ოპტიმალური გეგმა, საყრდენი გეგმა, სიმპლექს-მეთოდი, წრფივი დაპროგრამების ამოცანა, მატრიცა, ბაზისი.

შესავალი

მათემატიკას დიდი როლი აქვს ეკონომიკისა და ბიზნესის მართვის თეორიაში. ცნობილმა ეკონომისტმა და მათემატიკოსმა როი ჯორჯ ალენმა, აღნიშნა რომ: „მათემატიკა ეკონომისტებისთვის წარმოადგენს მძლავრ დამატებით იარაღს, მის წინაშე მდგომი განსაკუთრებით რთული პრობლემის გადასაჭრელად“. სტატიაში განხილულია წრფივი დაპროგრამების ამოცანის მათემატიკური მოდელი, რომელიც გულისხმობს ოპტიმალური გეგმის მოძებნას, კერძოდ კი განხილულია წრფივი დაპროგრამების ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნა.

ძირითადი ნაწილი

ეკონომიკის სფერო მათემატიკური მეთოდების აქტიური გამოყენების გარეშე შეუძლებელია. ეს სფერო იმდენად რთული და მრავალფეროვანია, მისი აღწერა და მართვა მათემატიკის გამოყენების გარეშე შეუძლებელია და თუ გავითვალისწინებთ ეკონომიკის კომპიუტერიზაციის პროცესს, რომლის დახმარებითაც ურთულესი ეკონომიკური სტრუქტურის რეალური აღწერაა შესაძლებელი, გამოყენებითი მათემატიკის მეთოდებს გვერდს ვერ აუვლით.

წრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა ეწოდება ამოცანას:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to extr \qquad (1)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \text{სადაც} \quad i = \overline{1,k} \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = \overline{k+1,m} \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = \overline{1,l} \qquad l \le n \qquad (4)$$

სადაც: c_j, a_{ij}, b_i მოცემული მუდმივებია და $k \le m$. ეს ამოცანა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: ვიპოვოთ $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადების ისეთი რიცხვითი მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2), (3), (4) პირობას და რომლისთვისაც (1) ფუნქცია ღებულობს ექსტრემალურ მნიშვნელობას.

$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to extr$ ფუნქციას უწოდებენ მიზნის ფუნქციას, ხოლო (2), (3), (4) თანაფარდობებს ამოცანის შეზღუდვებს.

რიცხვთა ერთობლიობას, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, რომლებიც (2), (3), (4) პირობებს აკმაყოფილებს ამოცანის დასაშვებ ამონახსნებს ანუ გეგმას უწოდებენ, ხოლო $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n*)$ გეგმას, რომლისთვისაც (1) მიზნის ფუნქცია ექსტრემალურ მნიშვნელობას ღებულობს, ოპტიმალური გეგმა ეწოდება და X გეგმისთვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\text{თუ} \quad f(x) \ge f(x^*) = f_{\min}\,, \quad \text{და} \quad \text{თუ} \quad f(x) \le f(x^*) = f_{\max}$$

მრავალი ეკონომიკური ამოცანის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ამოცანა, რომელიც გულისხმობს ოპტიმალური გეგმის მოძებნას, ამოხსნის სხვადასხვა ხერხი არსებობს. ერთ-ერთი ხერხია წრფივი დაპროგრამების ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნა, რომლის დროსაც ხდება ერთი საყრდენი გეგმიდან მეორეზე გადასვლა, რომლის დროსაც მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა მცირდება (ან იზრდება). ეს გადასვლა შესაძლებელია მაშინ, როცა ცნობილია რაიმე საყრდენი გეგმა ან შესაძლებელია მისი უშუალოდ განსაზღვრა. წრფივი დაპროგრამების ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნა შემდეგი ეტაპებისგან შედგება:

1. მოვძებნოთ საწყისი საყრდენი გეგმა
2. შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი
3. გავარკვიოთ, მოცემული საყრდენი გეგმის A_j შეფასებებს შორის არის თუ არა ერთი დადებითი (უარყოფითი) რიცხვი მაინც. თუ არა, მაშინ მოძებნილი საყრდენი გეგმა ოპტიმალურია, თუ Δ_j რიცხვებს შორის ერთი მაინცაა დადებითი (უარყოფითი) რიცხვი, მაშინ დავადგენთ, რომ ამოცანას ამონახსენი არ აქვს, ან გადავიდეთ ახალ საყრდენ გეგმაზე.
4. ახალ საყრდენ გეგმაზე გადასასვლელად განვსაზღვროთ მიმმართველი სვეტის და მიმმართველი სტრიქონის ნომრები.
5. განვსაზღვროთ ახალი საყრდენი გეგმის დადებითი კომპონენტები ახალ ბაზაში და შევადგინოთ ახალი სიმპლექს-ცხრილი.
6. შევამოწმოთ ახალი სატრდენი გეგმა ოპტიმალურობაზე, თუ ის ოპტიმალური არ არის საჭიროა ახალი საყრდენ გეგმაზე გადასვლა და დავბრუნდებით მეოთხე ეტაპზე.
7. ბოლოს ამოვწეროთ ოპტიმალური გეგმა და მიზნის ფუნქციის მინიმალური (მაქსიმალური) მნიშვნელობა.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა: ორი A_1; A_2 სახის ნაკეთობის დასამზადებლად საწარმო იყენებს B_1; B_2 სახის მოწყობილობებს. ერთი ნაკეთობის დასამზადებლად თითოეული ტიპის მოწყობილობებისთვის საჭირო დრო, თითოეული მოწყობილობის სამუშაო დროის საერთო ფონდი და თითოეული სახის ერთი ნაკეთობის რეალიზაციით მიღებული მოგება (ფულად ერთეულში) მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

ცხრილი 1.

მოწყობილობის ტიპი	ერთი ნაკეთობის დახარჯული დრო	დასამუშავებლად (სთ)	მოწყობილობის სამუშაო დროის საერთო ფონდი (სთ)
	A_1	A_2	
B_1	2	5	20
B_2	12	6	72
მოგება	6	8	

განვსაზღვროთ, რომელი სახის ნაკეთობა რა რაოდენობით უნდა დაამზადოს საწარმომ, რომ მათი რეალიზაციით მიღებული მოგება იყოს მაქსიმალური, შევადგინოთ მათემატიკური მოდელი და ამოვხსნათ ამოცანა სიმპლექს-მეთოდის გამოყენებით.

ამოხსნა: ვთქვათ, საწარმომ უნდა დაამზადოს x_1 ერთეული A_1 სახის ნაკეთობა და x_2 ერთეული A_2 სახის. ამ რაოდენობის ნაკეთობათა დასამზადებლად B_1 მოწყობილობისთვის საჭირო დრო იქნება $2x_1+5x_2$ და რადგან ამ ტიპის მოწყობილობებისთვის სამუშაო დრო არ აღემატება 20 საათს, ამიტომ მართებული იქნება შემდეგი უტოლობა: $2x_1+5x_2 \le 20$

თუ ანალოგიურად ვიმსჯელებთ B_2 მოწყობილობის შესაძლო გამოყენების შესახებ მივიღებთ შემდეგ უტოლობას: $12x_1+6x_2 \le 72$.

საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ უტოლობათა სისტემას: $\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 20 \\ 12x_1+6x_2 \le 72 \end{cases}$

რადგან დასამზადებელ ნაკეთობათა რაოდენობა არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ამიტომ $x_1 \ge 0$ და $x_2 \ge 0$ (თუ რომელიმე სახის პროდუქცია საერთოდ არ იწარმოებს, მაშინ $x_j = 0$, სხვა შემთხვევაში $x_j > 0$). x_1 ერთეული A_1 სახის ნაკეთობის და x_2 ერთეული A_2 სახის ნაკეთობის რეალიზაციით მიღებული მოგება იქნება $f = 6x_1+8x_2$ ფულადი ერთეული.

მოცემული ამოცანის მათემატიკური მოდელი საბოლოოდ ასე ჩაიწერება:

$$f = 6x_1+8x_2 \to \max \qquad (5)$$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 20 \\ 12x_1+6x_2 \le 72 \end{cases} \qquad (6)$$

$$x_j \ge 0 \ ; \ \ j = 1.2$$

რადგან მიზნის $f = 6x_1+8x_2 \to \max$ ფუნქცია და უტოლობათა სისტემის ორივე უტოლობა წრფივია, ამიტომ მოცემული ამოცანა წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ამოცანას.

იგივე ამოცანა ჩავწეროთ წრფივი დაპროგრამების კანონიკური ამოცანის ფორმით, ამიტომ სისტემის ყოველ უტოლობას დავუმატოთ თითო დამატებითი ცვლადი და ჩავწეროთ განტოლებათა სისტემის სახით, რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3 = 20 \\ 12x_1+6x_2+x_4 = 72 \end{cases}$$

ეს განტოლებათა სისტემა ჩავწეროთ ვექტორული ფორმით $x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4 = A_0$ სადაც

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} \ A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ A_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 72 \end{pmatrix}$$

რადგან A_j ; $j = \overline{1;4}$ ვექტორებს შორის ორი ერთეულოვანია, ამიტომ მოცემული ამოცანისათვის უშუალოდ შეიძლება ვიპოვოთ საწყისი საყრდენი გეგმა $X_0 = (0;0;20;72)$. შევადგინოთ სიმპლექს ცხრილი პირველი იტერაციისთვის, გამოვთვალოთ f_0, Δ_j, სადაც $j = \overline{1;4}$ მნიშვნელობები და შევამოწმოთ არის თუ არა საწყისი საყრდენი გეგმა ოპტიმალური. (საყრდენი გეგმა ოპოტიმალური იქნება თუ ყველა $\Delta_j \ge 0$ როცა $j = \overline{1;n}$).

ცხრილი 2.

ბაზისი	c_b	A_0	6	8	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	20	2	[5]	1	0
A_4	0	72	12	6	0	1
		0	-6	-8	0	0
		f_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4

$$f_0 = c_b A_0 = 0\cdot 20 + 0\cdot 72 = 0$$
$$z_1 = c_b A_1 = 0\cdot 2 + 0\cdot 12 = 0 \qquad \Delta_1 = z_1 - c_1 = 0 - 6 = -6$$
$$z_2 = c_b A_2 = 0\cdot 5 + 0\cdot 6 = 0 \qquad \Delta_2 = z_2 - c_2 = 0 - 8 = -8$$
$$z_3 = c_b A_3 = 0 \qquad \Delta_3 = z_3 - c_3 = 0$$
$$z_4 = c_b A_4 = 0 \qquad \Delta_4 = z_4 - c_4 = 0$$

ეს გეგმა არ არის ოპტიმალური, რადგან $\Delta_1 = -6;\ \Delta_2 = -8$. ვიპოვოთ $\min\limits_{\Delta_{j<0}} \Delta_j = \Delta_2 = -8$, მაშასადამე ბაზისში უნდა შევიტანოთ A_2 ვექტორი. ეხლა განვსაზღვროთ ბაზისიდან გამოსარიცხი ვექტორი, ამისათვის ვიპოვოთ $Q_0 = \min\left(b_i / a_{ij}\right)$ ე.ი $Q_0 = \min\left\{\frac{20}{5};\frac{72}{6}\right\} = 4$. მაშასადამე, ბაზისიდან უნდა გამოვრიცხოთ A_3 ვექტორი. მიმმართველი იქნება A_2 ვექტორის სვეტი და I სტრიქონი. შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი II იტერაციისთვის.

თავდაპირველად შევავსოთ ახალი ცხრილის ის სტრიქონები, რომლის ნომერი ემთხვევა წინა ცხრილის მიმმართველი სტრიქონის ნომერს, ანუ I სტრიქონს. ამ სტრიქონის ელემენტების მისაღებად ცხრ.2-ის I სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები უნდა გავყოთ გენერალურ ელემენტზე ანუ 5-ზე. ამასთან c_b სვეტში ჩავწეროთ $c_2 = 8$. კოეფიციენტები, რომელიც ბაზისში შესატანი A_2 ვექტორის სვეტში დგას.

ცხრილი 3.

ბაზისი	c_b	A_0	6	8	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_2	8	4	2/5	1	1/5	0
A_4	0	48	[18/5]	0	-6/5	1
		32	-14/5	0	8/5	0
		f_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4

ცხრ.3-ის დანარჩენი ელემენტები შეიძლება ვიპოვოთ სამკუთხედის წესის გამოყენებით. გამოვთვალოთ ცხრ.3-ის A_0 სვეტის II ელემენტი. მის გამოსათვლელად მოვძებნოთ შემდეგი სამი რიცხვი:

1. რიცხვი, რომელიც არის ცხრ.2-ის A_0 სვეტის და II სტრიქონის თანაკვეთაზე, ანუ 72.
2. რიცხვი, რომელიც დგას ცხრ.2-ში A_2 ვექტორის სვეტის და II სტრიქონის თანაკვეთაზე, ანუ 6.
3. რიცხვი, რომელიც დგას ცხ-2-ში A_0 ვექტორის სვეტის და I სტრიქონის თანაკვეთაზე, ანუ 4.

და პირველ რიცხვს გამოვაკლოთ დანარჩენი ორი რიცხვის ნამრავლი.

$$72 - 6 \cdot 4 = 72 - 24 = 48$$

ანალოგიურად გამოვთვალოთ სხვა წევრებიც:

$$12 - 6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{48}{5} \qquad 0 - 6 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{6}{5} \qquad 1 - 6 \cdot 0 = 1$$

$$f_0 = c_b A_0 = 8 \cdot 4 + 0 \cdot 48 = 32$$

$$z_1 = c_b A_1 = 8 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{48}{5} = \frac{16}{5} \qquad \Delta_1 = z_1 - c_1 = \frac{16}{5} - 6 = -\frac{14}{5}$$

$$z_2 = c_b A_2 = 8 \cdot 1 = 8 \qquad \Delta_2 = z_2 - c_2 = 8 - 8 = 0$$

$$z_3 = c_b A_3 = 8 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5} \qquad \Delta_3 = z_3 - c_3 = \frac{8}{5} - 0 = \frac{8}{5}$$

$$z_4 = c_b A_4 = 8 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \qquad \Delta_4 = z_4 - c_4 = 0 - 0 = 0$$

ეს გეგმა არაა ოპტიმალური, რადგან $\Delta_1 = -\frac{14}{5} < 0$. მაშასადამე, ბაზისში უნდა შევიტანოთ A_1 ვექტორი, განვსაზღვროთ ბაზისიდან გამოსარიცხი ვექტორი, ამიტომ:

$$Q_0 = \min\left(b_0 / a_{ij}\right) = \min\left\{\frac{4}{\frac{2}{5}}; \frac{48}{\frac{48}{5}}\right\} = \min\{10; 5\} = 5 .$$

მაშასადამე, ბაზისიდან უნდა გამოვრიცხოთ A_4 ვექტორი. მიმმართველი იქნება A_1 ვექტორის სვეტი და II სტრიქონი. შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი III იტერაციისთვის ანალოგიურად:

$$4 - \frac{2}{5} \cdot 5 = 2 \qquad \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{2}{5} \cdot 0 = 1 \qquad 0 - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{48} = -\frac{1}{24}$$

ცხრილი 4.

ბაზისი	c_b	A_0	6	8	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_2	8	2	0	1	1/4	-1/24
A_1	6	5	1	0	-1/8	5/48
		46	0	0	5/4	7/24
		f_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4

$$f_0 = c_b A_0 = 8 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 46$$

$$z_2 = c_b A_2 = 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 8 \qquad \Delta_2 = z_2 - c_2 = 8 - 8 = 0$$

$$z_3 = c_b A_3 = 8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{8} = 1\frac{1}{4} \qquad \Delta_3 = z_3 - c_3 = \frac{5}{4}$$

$$z_4 = c_b A_4 = 8 \cdot \left(-\frac{1}{24}\right) + 6 \cdot \frac{5}{48} = \frac{7}{24}$$

ეს გეგმა ოპტიმალურია, რადგან:

$\Delta_i \geq 0$ მაშასადამე, $X^{\mathrm{I}}_{\max} = (5;2;0;0)$ და $f_{\max} = 46$.

დასკვნა

სტატიაში ნაჩვენებია ინტერდისციპლინარული კავშირის დამყარება უმაღლეს მათემატიკასა და გარკვეული ტიპის ეკონომიკურ ამოცანებს შორის. კერძოდ, წრფივი დაპროგრამების ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნა, რომლის დროსაც ერთი საყრდენი გეგმიდან ხდება მეორე საყრდენ გეგმაზე გადასვლა. ამ გადასვლით მცირდეაბა (ან იზრდება) მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა. განხილულია ამ მეთოდით ამოხსნის ეტაპები. ჩვენი მიზანია ეკონომიკური სპეციალობის სტუდენტებს უმაღლესი მათემატიკის საკითხების პარალელურად შევასწავლოთ მათემატიკური მეთოდების გამოყენება ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნის დროს, რათა შემდგომ პრაქტიკაში მარტივად გადაწყვიტონ ესა თუ ის ეკონომიკური პრობლემა. აგრეთვე განხილულია წრფივი დაპროგრამების ამოცანა, რომელიც ამოხსნილია სიმპლექს-მეთოდის გამოყენებით.

ლიტერატურა

1. დ.ნატროშვილი, ლ.გიორგაშვილი, გ.ჯაშიაშვილი. მათემატიკა ეკონომისტებისთვის. თბილისი 2008.
2. ა.ლურსმანაშვილი. მათემატიკური დაპროგრამების ზოგიერთი საკითხი. თბილისი 1997.
3. ა. გაგნიძე, კ.გელაშვილი. ოპტიმიზაციის მეთოდები და თამაშთა თეორია. თბილისი 2002.
4. Chiang A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", The McGrow-Hill Company, International edition 2005, 688 pp.

Solution of a Linear Programming Problem by the Simplex Method

Maka Lomtadze

Abstract

The field of economics is inconceivable without the active application of mathematical methods. The subject is so complex and multifaceted that its analysis and management are unattainable without mathematics. Moreover, in light of the ongoing computerization of economics – through which it becomes possible to model and describe highly intricate economic structures – the use of applied mathematics is not merely optional but indispensable. A profound knowledge of mathematics is therefore a necessary prerequisite. This paper considers an economic problem formulated and solved by means of linear programming, specifically through the simplex method. The solution of any linear programming problem – namely, the determination of an optimal plan – can be achieved via the simplex algorithm. Prior to applying this method, it is required that the given problem, if initially presented in an alternative form, be transformed into its canonical form.

Keywords: objective function, optimal plan, basic feasible solution, simplex method, linear programming problem, matrix, basis.